Homothéties et Translations

Professeur : Christian CYRILLE

7 août 2020

1 Groupe des Transformations

Soit E un espace affine de dimension $n \geq 2$ et de direction un espace vectoriel $\vec{E}$

1.1 Définition

On appelle t**ransformation géométrique de** E **toute application bijective de** E **dans** E. On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble de toutes ces transformations.

1.2 Lemme de la bijection

— Si f est une application d'un ensemble A vers un ensemble B
— Si g est une application d'un ensemble B vers un ensemble A
— Si $g \circ f = Id_A$
— Si $f \circ g = Id_B$

Alors f est bijective et sa bijection réciproque $f^{-1} = g$

1.2.1 Démonstration

— Démontrons d'abord que f est surjective.
Soit $y \in B$ alors $y = Id_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ donc tout y de B a donc au moins un antécédent $g(y)$ par f dans E donc f est surjective.
— Démontrons maintenant que f est injective.
Soit $x \in A$ Soit $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x) = g(f(x'))$ mais $g \circ f = Id_E$ donc $x = x'$. Donc f est injective.
— En conclusion, f est bijective et

$$\begin{array}{ccccc} & f^{-1} & & & \\ B & \longrightarrow & A & & \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = \text{l'antécédent de y par f} & = g(y) \end{array}$$

Donc $f^{-1} = g$

1.3 Propriété

L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des transformations de E muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un **groupe non commutatif appelé groupe affine de** E .

1.3.1 Démonstration

— La composée de 2 bijections de E dans E est une bijection de E dans E donc $\circ$ est interne dans $\mathcal{S}_E$.
— La loi $\circ$ de composition des applications est associative
— $\mathcal{S}_E$ admet Id_E comme élément neutre puisque

$$\forall f \in \mathcal{S}_E \qquad f \circ id_E = id_E \circ f = f$$

— Tout élément f de $\mathcal{S}_E$ est une bijection donc admet une bijection réciproque f^{-1} telle que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_2$$

donc tout élément de $\mathcal{S}_E$ admet un élément symétrique dans $\mathcal{S}_E$ pour la loi $\circ$

Par conséquent , $(\mathcal{S}_E, \circ)$ est un groupe.

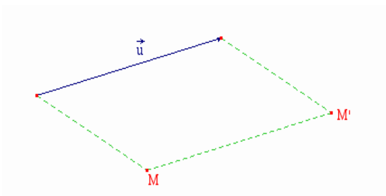
Ce groupe n'est pas commutatif car nous verrons par la suite que toute homothétie est une transformation mais que la composition d'homothéties de centre différents n'est pas commutative donc
$\boxed{(\mathcal{S}_E, \circ) \text{ est un groupe non commutatif}}$

2 Sous-groupe $(\mathcal{T}_E, \circ)$ des Translations

2.1 Définition

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$, on appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application :

$$\begin{array}{ccll} & T_{\vec{u}} & & \\ E & \longrightarrow & E & \\ M & \longmapsto & M' & \textit{tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \end{array}$$



2.2 Propriétés

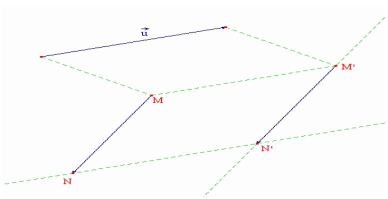
2.2.1 L'identité est une translation particulière

$T_{\vec{0}} = Id_E$

2.2.2 Caractérisation affine d'une translation

f est une translation $\Longleftrightarrow$ f est une application affine dont l'endomorphisme associé est $Id_{\vec{E}}$
$\Longleftrightarrow$ f transforme tout bipoint (M, N) en un bipoint (M', N') tel que $\overrightarrow{M'N'} = Id_{\vec{E}}(\overrightarrow{M'N'})$
$\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{ccll} & f & & \\ M & \longmapsto & M' & \\ N & \longmapsto & N' & \textit{tel que } \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \end{array}$$



Démonstration :

1. $\Longrightarrow$:
   Soit $(M, N) \in E^2$ alors
   $$\begin{array}{ccll} & T_{\vec{u}} & & \\ M & \longmapsto & M' & \textit{tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ N & \longmapsto & N' & \textit{tel que } \overrightarrow{NN'} = \vec{u} \end{array}$$
   Par conséquent, d'après la relation de Michel Chasles, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$.
   On en déduit que $T_{\vec{u}}$ est une application affine de E dans E dont l'endomorphisme(application linéaire) associé est $Id_{\vec{E}}$

2. $\Longleftarrow$:
   Soit f une application telle que

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M' \\ N & \longmapsto & N' \quad \textit{tel que } \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \end{array}$$

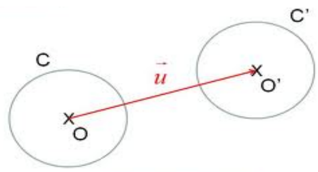
   Choisissons un point fixe A et notons $A' = f(A)$ alors $\overrightarrow{M'A'} = \overrightarrow{MA}$ donc
   $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AA'}$ d'où $f = T_{\vec{u}}$

2.2.3 Corollaire

Une translation est donc une isométrie affine et par conséquent possède toutes les propriétés des isométries affines :

1. En tant qu'application affine, elle conserve les barycentres et le parallélisme
2. En tant que bijection affine, elle conserve les dimensions des sous-espaces affines
3. En tant qu'isométrie affine, elle conserve les distances et les angles non orientés.
4. En tant qu'isométrie affine positive ou déplacement, elle conserve les angles orientés.

Par conséquent, une translation transforme :
- le milieu I du bipoint (A, B) en le milieu I' du bipoint (A', B')
- une droite (AB) en une droite $(A'B')$ parallèle.
- deux droites (D_1) et (D_2) parallèles en deux droites (D'_1) et (D'_2) parallèles
- deux droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires en deux droites (D'_1) et (D'_2) perpendiculaires
- un angle géométrique $\widehat{ABC}$ en un angle géométrique $\widehat{A'B'C'}$ égal
- un angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en un angle orienté $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ égal
- un cercle $\mathcal{C}(O; R)$ en un cercle $\mathcal{C}(O'; R)$ avec $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$
- un domaine $\mathcal{D}$ d'aire $\mathcal{A}$ en un domaine $\mathcal{D}'$ de même aire.
- dans l'espace, une sphère $\mathcal{S}(O; R)$ en une sphère $\mathcal{S}(O'; R)$ avec $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$



Translation de vecteur $\vec{u}$

2.2.4 Définition analytique d'une translation

En dimension 2,

$$f \text{ est une translation de vecteur } \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\textit{avec} \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

En dimension 3,

$$f \text{ est une translation de vecteur } \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\textit{avec} \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

2.2.5 Composition de translations

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$ alors

1. $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$
   donc la composition de translations est interne.
2. $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$
   donc la composition de translations est commutative.

Démonstration :

1. (a) $T_{\vec{u}} : M \longmapsto M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
   (b) $T_{\vec{v}} : M' \longmapsto M"$ tel que $\overrightarrow{M'M"} = \vec{v}$
   (c) donc $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} : M \longmapsto M"$ tel que $\overrightarrow{MM"} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M"} = \vec{u} + \vec{v}$
   donc $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$
2. $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}} = T_{\vec{v}+\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$

2.2.6 Corollaire

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$ alors

$$T_{\vec{-u}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}-\vec{u}} = T_{\vec{0}} = T_{-\vec{u}+\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{-u}}$$

donc $T_{\vec{u}}$ est bijective et $T_{\vec{u}}^{-1} = T_{\vec{-u}}$

2.2.7 Corollaire

$(\mathcal{T}_E, \circ)$ est donc un sous groupe du groupe des transformations $(\mathcal{S}_E, \circ)$ isomorphe au groupe $(\vec{E}, \circ)$

Démonstration :

1. $\mathcal{T}_E \subset \mathcal{S}_E$
2. La loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{T}_E$
3. $\forall (f, g) \in \mathcal{T}_E^2 \qquad g \circ f \in \mathcal{T}_E$
4. $\forall f \in \mathcal{T}_E \qquad f^{-1} \in \mathcal{T}_E$

Par conséquent, $(\mathcal{T}_E, \circ)$ est donc un sous groupe du groupe des transformations $(\mathcal{S}_E, \circ)$.
De plus, l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{T}_E & \longrightarrow & \vec{E} \\ & T_{\vec{u}} & \longmapsto & \vec{u} \end{array}$$

est bijective par construction et elle vérifie $\phi(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}) = \phi(T_{\vec{v}}) + \phi(T_{\vec{u}})$ donc c'est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{T}_E, \circ)$ sur le groupe $(\vec{E}, \circ)$

2.2.8 Points invariants d'une translation

Si l'on note $Inv(T_{\vec{u}})$ l'ensemble des points de E invariants par $T_{\vec{u}}$ c'est-à-dire tels que $T_{\vec{u}}(M) = M$ alors

$$Inv(T_{\vec{u}}) = \begin{cases} E \ si \ \vec{u} = \vec{0} \\ \emptyset \ si \ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Démonstration :
$M \in Inv(T_{\vec{u}}) \iff M' = T(M) = M \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \iff \vec{u} = \vec{0}$.
Alors de deux choses l'une :

— ou bien $\vec{u} \neq \vec{0}$ par conséquent, aucun point de E n'est invariant.
— ou bien $\vec{u} = \vec{0}$ par conséquent, la translation est donc l'identité donc l'ensemble des points invariant est E.
  On est en présence d'une invariance point par point.

3 Sous-groupe $(\mathcal{H}_\Omega, \circ)$ des Homothéties de même centre Ω

3.1 Définition

soit un réel $k \neq 0$. Soit un point Ω de E.
On appelle Homothétie de centre Ω et de rapport k l'application :

$$\begin{array}{ccc} & H(\Omega,k) & \\ E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M' \quad tel\ que\ \overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M} \end{array}$$

3.2 Propriétés

3.2.1

Le centre Ω d'une homothétie, un point M et son image M' sont alignés.

Evident car les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont colinéaires puisque $\overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}$

3.2.2 Homothéties particulières

1. $H(\Omega, 1) = Id_E$
2. $H(\Omega, -1)$ est la symétrie centrale S_Ω de centre Ω.

3.2.3 Points invariants

Si l'on note $Inv(H)$ l'ensemble des points de E invariants par $H(\Omega, k)$ c'est-à-dire tels que $H(\Omega, k)(M) = M$ alors

$$Inv(H) = \left\{ \begin{array}{l} E\ si\ k = 1 \\ \{\Omega\}\ si\ k \neq 1 \end{array} \right.$$

3.2.4 Composée d'homothéties de même centre

$$\forall (k, k') \in R^{*2} \qquad H(\Omega, k') \circ H(\Omega, k') = H(\Omega, k'k) = H(\Omega, kk') = H(\Omega, k) \circ H(\Omega, k')$$

Démonstration évidente.

3.2.5 Corollaire

Donc $\forall k \in R^* \qquad H(\Omega, \frac{1}{k}) \circ H(\Omega, k') = H(\Omega, k) \circ H(\Omega, \frac{1}{k}) = H(\Omega, 1) = Id_E$
donc $H(\Omega, k)$ est bijective et $H(\Omega, k)^{-1} = H(\Omega, \frac{1}{k})$

3.2.6 Effet vectoriel

$$\begin{array}{ccc} & H(\Omega,k) & \\ E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M' \\ N & \longmapsto & N' \quad tel\ que\ \overrightarrow{M'N'} = k\ \overrightarrow{MN} \end{array}$$

Démonstration :
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = k\ \overrightarrow{M\Omega} + k\ \overrightarrow{\Omega N} = k(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}) = k\ \overrightarrow{MN}$

3.2.7 Corollaire

Une homothétie est donc une application affine dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle de rapport k : h_k ou $kId_{\vec{E}}$. De plus, une homothétie étant bijective alors toute homothétie a toutes les propriétés d'une bijection affine.
Par conséquent, une homothétie transforme :
- le milieu I du bipoint (A, B) en le milieu I' du bipoint (A', B')
- une droite (AB) en une droite $(A'B')$ parallèle.
- deux droites (D_1) et (D_2) parallèles en deux droites (D'_1) et (D'_2) parallèles
- deux droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires en deux droites (D'_1) et (D'_2) perpendiculaires
- un angle géométrique $\widehat{ABC}$ en un angle géométrique $\widehat{A'B'C'}$ égal
- un cercle $\mathcal{C}(O; R)$ en un cercle $\mathcal{C}(O'; |k|\ R)$ avec $O' = H(O)$
- un domaine $\mathcal{D}$ d'aire $\mathcal{A}$ en un domaine $\mathcal{D}'$ d' aire $k^2\ \mathcal{A}$.
- dans l'espace, une sphère $\mathcal{S}(O; R)$ en une sphère $\mathcal{S}(O'; |k|\ R)$ avec $O' = H(O)$

Attention, une homothétie n'est pas une isométrie à part $H(\Omega, 1)$ et $H(\Omega, -1)$ Par conséquent, une homothétie transforme :
- un cercle $\mathcal{C}(O; R)$ en un cercle $\mathcal{C}(O'; |k|\ R)$ avec $O' = H(O)$
- un domaine $\mathcal{D}$ d'aire $\mathcal{A}$ en un domaine $\mathcal{D}'$ d' aire $k^2\ \mathcal{A}$.
- dans l'espace, une sphère $\mathcal{S}(O; R)$ en une sphère $\mathcal{S}(O'; |k|\ R)$ avec $O' = H(O)$
- dans l'espace, un solide V de volume $\mathcal{V}$ en un solide V' de volume $|k|^3\ \mathcal{V}$.

3.3 Corollaire

Attention ! Les seules homothéties qui sont des isométries sont $H(\Omega, 1)$ et $H(\Omega, -1)$.
Par conséquent, une homothétie transforme :
- un cercle $\mathcal{C}(O; R)$ en un cercle $\mathcal{C}(O'; |k|\ R)$ avec $O' = H(O)$
- un domaine $\mathcal{D}$ d'aire $\mathcal{A}$ en un domaine $\mathcal{D}'$ d' aire $k^2\ \mathcal{A}$.
- dans l'espace, une sphère $\mathcal{S}(O; R)$ en une sphère $\mathcal{S}(O'; |k|\ R)$ avec $O' = H(O)$
- dans l'espace, un solide V de volume $\mathcal{V}$ en un solide V' de volume $|k|^3\ \mathcal{V}$.

3.3.1 Composée d'homothéties de même centre

$$\forall (k, k') \in R^{*2} \qquad H(\Omega, k') \ \circ \ H(\Omega, k) = H(\Omega, k'k) = H(\Omega, kk') = H(\Omega, k') \ \circ \ H(\Omega, k')$$

Démonstration évidente.

3.4

$(\mathcal{H}_\Omega, \circ)$ est donc un sous groupe du groupe des transformations $(\mathcal{S}_E, \circ)$ isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$

Démonstration :

1. $\mathcal{H}_\Omega \subset \mathcal{S}_E$
2. La loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{H}_\Omega$
3. $\forall (f, g) \in \mathcal{H}_\Omega^2 \qquad g \ \circ \ f \in \mathcal{H}_\Omega$
4. $\forall f \in \mathcal{H}_\Omega \qquad f^{-1} \in \mathcal{H}_\Omega$

Par conséquent, $(\mathcal{H}_\Omega, \circ)$ est donc un sous groupe du groupe des transformations $(\mathcal{S}_E, \circ)$.
De plus, l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathcal{H}_\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & H(\Omega, k) & \longmapsto & k \end{array}$$

est bijective par construction et elle vérifie $\phi(H(\Omega, k') \ \circ \ H(\Omega, k)) = k'k = \phi(H(\Omega, k')) \times \phi(H(\Omega, k))$ donc c'est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{H}_\Omega, \circ)$ sur le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$

4 Sous-groupe $(\mathcal{H}_E \cup \mathcal{T}_E, \circ)$ des Homothéties-translations

4.1 Condition nécessaire pour qu'une application soit une translation

Si f est une translation $T_{\vec{u}}$ alors f transforme le bipoint (M,N) en le bipoint (M',N') tel que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

4.2 Condition nécessaire pour qu'une application soit une homothétie

Si f est une homothétie $H(\Omega, k)$ alors f transforme le bipoint (M,N) en le bipoint (M',N') tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\ \overrightarrow{MN}$

4.3 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application soit une homothétie-translation

1. Si f est une application affine de E dans E telle que

$$\forall (M,N) \in E^2 \quad \exists k \in R^* \qquad \overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$$

   alors
   — **ou bien** $k = 1$
   dans ce cas f est une translation de vecteur $Af(A)$ où A est un point choisi dans E.
   — **ou bien** $k \neq 1$
   dans ce cas, f est une homothétie de rapport k et de centre son seul point invariant.
2. Par conséquent , f est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle de rapport k : h_k ou $kId_{\vec{E}} \iff f$ est une homothétie-translation $\iff f \in \mathcal{H}_E \cup \mathcal{T}_E$

Démonstration :
Soit $(M,N) \in E^2$. Soient $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$.
Supposons $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
— ou bien $k = 1$ alors f est un translation
— ou bien $k \neq 1$.
Soit $A \in E$ avec $A' = f(A)$. Déterminons alors $Inv(f)$:
$\Omega \in Inv(f) \iff f(\Omega) = \Omega \iff A'\Omega = kA\Omega \iff \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A\Omega} = k\overrightarrow{A\Omega}$
$\iff (1-k)\overrightarrow{A\Omega} = AA' \iff \overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$
f a donc un point invariant unique Ω.
$\forall M \in E$ si l'on note $M' = f(M)$ on a donc $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ donc $f = H(\Omega, k)$

4.4 Points invariants d'une homothétie-translation

1. **Une translation n'a pas de point invariant sauf si son vecteur $\vec{u} = \vec{0}$.**
   (a) si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $Inv(T_{\vec{u}}) = \emptyset$
   (b) si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $Inv(T_{\vec{u}}) = E$
   car $T_{\vec{0}} = Id_E$ et tous les points de E sont invariants point par point.
2. **Une homothétie n'a qu'un seul point invariant : son centre sauf si son rapport** $k = 1$
   (a) si $k \neq 1$ alors $Inv(H(\Omega, k)) = \{\Omega\}$
   (b) si $k = 1$ alors $Inv(H(\Omega, 1)) = E$
   car $H(\Omega, 1) = Id_E$ et tous les points de E sont invariants point par point.

4.5 Composition

La composée de deux homothéties-translations est une homothétie-translation.
Plus exactement :

1. La composée de deux translations $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ est une translation $T_{\vec{u}+\vec{v}}$.
2. La composée de deux homothéties de même centre $H(\Omega, k) \circ H(\Omega, k) = H(\Omega, kk')$ est une homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports kk'.
3. Par contre la composée de deux homothéties $H(\Omega_2, k_2) \circ H(\Omega_1, k_1)$ de centres différents Ω_2 et Ω_1 est :
   (a) si $k_1k_2 = 1$ une translation de vecteur $\vec{V} = (k_2 - 1)\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$
   (b) si $k_1k_2 \neq 1$ une homothétie pure dont le centre Ω_3 est aligné avec les deux autres centres Ω_1 et Ω_2 et dont le rapport est k_1k_2.
   On a $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_3} = \dfrac{k_2 - k_1k_2}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$
4. La composée d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ et d'une translation est une homothétie pure :
   (a) $H(\Omega, k) \circ T_{\vec{u}} = H(I, k)$ où $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{k}{1-k}\vec{u}$
   (b) $T_{\vec{u}} \circ H(\Omega, k) = H(J, k)$ où $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$
   Cette composition n'est pas commutative.

Démonstration :

1. On a déjà démontré que $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$.
2. On a aussi déjà démontré que $H(\Omega', k') \circ H(\Omega, k) = H(\Omega, kk')$
3. Par contre la composée de deux homothéties $H(\Omega_2, k_2) \circ H(\Omega_1, k_1)$ de centres différents Ω_1 et Ω_2 fonctionne ainsi :
$$\begin{array}{ccccc} & H(\Omega_1, k_1) & & H(\Omega_2, k_2) & \\ E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M_1 & \longmapsto & M_2 \\ N & \longmapsto & N_1 & \longmapsto & N_2 \end{array}$$
où $\overrightarrow{M_1N_1} = k_1\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M_2N_2} = k_2\overrightarrow{M_1N_1}$ d'où $\overrightarrow{M_2N_2} = k_2k_1\overrightarrow{MN}$.
Notons $H_2 = H(\Omega_2, k_2)$ et $H_1 = H(\Omega_1, k_1)$.
On a donc $H_2 \circ H_1$ est une homothétie-translation car $k_2k_1 \neq 0$.
   (a) ou bien $k_1k_2 = 1$
   Alors $H_2 \circ H_1$ est une translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{\Omega_1(H_2 \circ H_1)(\Omega_1)} = \overrightarrow{\Omega_1\Omega'}$ où $\overrightarrow{\Omega_2\Omega'} = k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$.
   Donc $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1\Omega'} = k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$ d'où $\vec{V} = \overrightarrow{\Omega_1\Omega'} = (k_2 - 1)\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$
   (b) ou $k_1k_2 \neq 1$
   Alors $H_2 \circ H_1$ est une une homothétie de rapport k_2k_1 et de centre Ω_3 qu'il reste à à déterminer :
$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & H(\Omega_3, k_2k_1) & \longrightarrow & E \\ & H(\Omega_1, k_1) & & H(\Omega_2, k_2) & \\ \Omega_1 & \longmapsto & \Omega_1 & \longmapsto & \Omega' \end{array}$$
   où $\overrightarrow{\Omega_2\Omega'} = k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_3\Omega'} = k_1k_2\overrightarrow{\Omega_3\Omega_1}$
   d'où $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_3} = \overrightarrow{\Omega_2\Omega'} + \overrightarrow{\Omega'\Omega_3} = k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} - k_1k_2\overrightarrow{\Omega_3\Omega_1}$
   alors $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_3} = k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} - k_1k_2(\overrightarrow{\Omega_3\Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1})$.
   On obtient donc $(1 - k_1k_2)\overrightarrow{\Omega_2\Omega_3} = (k_2 - k_1k_2)\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$ d'où $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_3} = \dfrac{k_2 - k_1k_2}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$
4. La composée d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ et d'une translation est une homothétie pure :
   (a) $H(\Omega, k) \circ T_{\vec{u}} = H(I, k)$ où $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{k}{1-k}\vec{u}$ car
$$\begin{array}{ccccc} & T_{\vec{u}} & & H(\Omega, k) & \\ M & \longmapsto & M' & \longmapsto & M'' \\ N & \longmapsto & N' & \longmapsto & N'' \end{array}$$

avec $\overrightarrow{M"N"} = k\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ où $k \neq 1$ donc $H(\Omega, k) \circ T_{\vec{u}} = H(I, k)$. Reste à déterminer I.

$$I \overset{T_{\vec{u}}}{\longmapsto} I_1 \overset{H(\Omega,k)}{\longmapsto} I$$

$\overrightarrow{II_1} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega I} = k\overrightarrow{\Omega I_1}$.
D'où $\overrightarrow{\Omega I} = k\overrightarrow{\Omega I_1} = k(\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{II_1}) = k\ \overrightarrow{\Omega I} + k\ \vec{u}$
On en déduit que $(1-k)\overrightarrow{\Omega I} = k\vec{u}$ d'où $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{k}{1-k}\vec{u}$

(b) $T_{\vec{u}} \circ H(\Omega, k) = H(J, k)$ où $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$:
car

$$\begin{array}{ccccc} & H(\Omega,k) & & T_{\vec{u}} & \\ M & \longmapsto & M' & \longmapsto & M" \\ N & \longmapsto & N' & \longmapsto & N" \end{array}$$

avec $\overrightarrow{M"N"} = \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ où $k \neq 1$ donc $H(\Omega, k) \circ T_{\vec{u}} = H(I, k)$. Reste à déterminer I.

$$I \overset{H(\Omega,k)}{\longmapsto} I_1 \overset{T_{\vec{u}}}{\longmapsto} I$$

$\overrightarrow{I_1 I} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega I_1} = k\overrightarrow{\Omega I}$.
D'où $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\Omega I_1} = \dfrac{1}{k}(\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{II_1}) = \dfrac{1}{k}(\overrightarrow{\Omega I} - \vec{u})$
On en déduit que $(1 - \dfrac{1}{k})\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ donc $\overrightarrow{\Omega I} = -\dfrac{1}{k-1}\vec{u} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$

4.6 Structure de sous-groupe

$(\mathcal{H}_E \cup \mathcal{T}_E, \circ)$ est un sous-groupe non commutatif du groupe affine $(\mathcal{S}_E, \circ)$.

Démonstration :

1. $\circ$ est interne dans $\mathcal{H}_E \cup \mathcal{T}_E$ puisque
   - La composée de deux translations est une translation
   - La composée de deux homothéties de même centre est une homothétie si le produit des rapports est $\neq 1$
   - La composée de deux homothéties de même centre est une translation si le produit des rapports vaut 1
   - La composée de deux homothéties de centres différents est une homothétie si le produit des rapports est $\neq 1$
   - La composée de deux homothéties de centres différents est une translation si le produit des rapports vaut 1
   - La composée d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ et d'une translation dans un ordre quelconque est une homothétie pure
2. $\forall f \in \mathcal{H}_E \cup \mathcal{T}_E$ on a bien f qui est bijective et $f^{-1} \in mathcal H_E \cup \mathcal{T}_E$ puisque
   - si $f = T_{\vec{u}}$ alors f est bijective et $f^{-1} = T_{-\vec{u}}$
   - si $f = H(\Omega, k)$ alors f est bijective et $f^{-1} = H(\Omega; \dfrac{1}{k}$
3. Ce sous-groupe est non commutatif puisque $H(\Omega_2, k_2) \circ H(\Omega_1, k_1) \neq H(\Omega_1, k_1) \circ H(\Omega_2, k_2)$ ou encore parce que $T_{\vec{u}} \circ H(\Omega, k) \neq H(\Omega, k) \circ T_{\vec{u}}$

5 Exercices

5.1

Soient O, A, B, C et D des points alignés tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$.
On note $T_{2\vec{u}}$ la translation de vecteur $2\vec{u}$ et S_C la symétrie centrale de centre C.
Résoudre l'équation suivante d'inconnue X, une application du plan dans le plan :

$$T_{2\vec{u}} \ o\ X \ o\ T_{-2\vec{u}} = S_C$$

5.1.1 Corrigé

$$O \xrightarrow{\vec{u}} A \xrightarrow{\vec{u}} B \xrightarrow{\vec{u}} C \xrightarrow{\vec{u}} D$$

$T_{2\vec{u}} \ o\ X \ o\ T_{-2\vec{u}} = S_C \iff T_{-2\vec{u}} \ o\ T_{2\vec{u}} \ o\ X \ o\ T_{-2\vec{u}} = T_{-2\vec{u}} \ o\ S_C \iff Id \ o\ X \ o\ T_{-2\vec{u}} = T_{-2\vec{u}} \ o\ S_C$
$\iff X \ o\ T_{-2\vec{u}} \ o\ T_{2\vec{u}} = T_{-2\vec{u}} \ o\ S_C \ o\ T_{2\vec{u}} \iff X \ o\ Id = T_{-2\vec{u}} \ o\ S_C \ o\ T_{2\vec{u}} \iff X = T_{-2\vec{u}} \ o\ S_C \ o\ T_{2\vec{u}}$

- S_C est l'homothétie $H(C;-1)$
- X est la composée de 3 homothéties-translations donc est une homothétie-translation.
- Comme $T_{-2\vec{u}}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est id ou h_1 l'homothétie vectorielle de rapport 1
- Comme $H(C;1)$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est h_{-1} l'homothétie vectorielle de rapport -1
- Comme $T_{2\vec{u}}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est id ou h_1 l'homothétie vectorielle de rapport 1
- Alors X est une application affine dont l'endomorphisme associé est : $h_1 \ o\ h_{-1} \ o\ h_1 = h_{-1}$

Par conséquent, X est une homothétie dont le centre est son seul point invariant et de rapport -1.
Or

$$A \xrightarrow{T_{2\vec{u}}} C \xrightarrow{S_C} C \xrightarrow{T_{-2\vec{u}}} A$$

Donc $\boxed{X = S_A}$

5.2

On note $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et S_A la symétrie centrale de centre A.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application suivante $f = T_{\vec{u}}\ o\ S_A\ o\ T_{\vec{u}}$
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application suivante $g = (T_{\vec{u}})^{-1}\ o\ S_A\ o\ T_{\vec{u}}$

5.2.1 Corrigé

1. — S_A est l'homothétie $H(A; -1)$
   — f est la composée de 3 homothéties-translations donc est une homothétie-translation.
   — Comme $T_{\vec{u}}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est id ou h_1 l'homothétie vectorielle de rapport 1
   — Comme $H(A; 1)$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est h_{-1} l'homothétie vectorielle de rapport -1
   — Comme $T_{A\vec{u}}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est id ou h_1 l'homothétie vectorielle de rapport 1
   — Alors f est une application affine dont l'endomorphisme associé est : $h_1\ o\ h_{-1}\ o\ h_1 = h_{-1}$

   Par conséquent, f est une homothétie dont le centre est son seul point invariant et de rapport -1.
   C'est une symétrie centrale de centre son seul point invariant Ω donc $f(\Omega) = \Omega$
   D'où
   $$\Omega \xrightarrow{T_{\vec{u}}} \Omega' \xrightarrow{S_A} \Omega" \xrightarrow{T_{\vec{u}}} \Omega$$
   On a donc : $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{A\Omega"} = -\overrightarrow{A\Omega'}$ et $\overrightarrow{\Omega"\Omega} = \vec{u}$
   donc $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{A\Omega"} + \overrightarrow{\Omega"\Omega} = -\overrightarrow{A\Omega'} + \vec{u} = -(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega'}) + u = -\overrightarrow{A\Omega} - \vec{u} + \vec{u}$
   par conséquent $2\overrightarrow{A\Omega} = \vec{0}$ donc $A = \Omega$ d'où $\boxed{f = S_A}$

2. — S_A est l'homothétie $H(A; -1)$
   — f est la composée de 3 homothéties-translations donc est une homothétie-translation.
   — Comme $(T_{\vec{u}})^{-1} = T_{-\vec{u}}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est id ou h_1 l'homothétie vectorielle de rapport 1
   — Comme $H(A; 1)$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est h_{-1} l'homothétie vectorielle de rapport -1
   — Comme $T_{\vec{u}}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est id ou h_1 l'homothétie vectorielle de rapport 1
   — Alors g est une application affine dont l'endomorphisme associé est : $h_1\ o\ h_{-1}\ o\ h_1 = h_{-1}$

   Par conséquent, g est une homothétie dont le centre est son seul point invariant et de rapport -1. C'est une symétrie centrale de centre son seul point invariant
   Soit A' tel que $\overrightarrow{A'A} = \vec{u}$
   Or
   $$A' \xrightarrow{T_{\vec{u}}} A \xrightarrow{S_A} A \xrightarrow{T_{-\vec{u}}} A'$$
   Donc $\boxed{g = S_{A'}}$

5.3

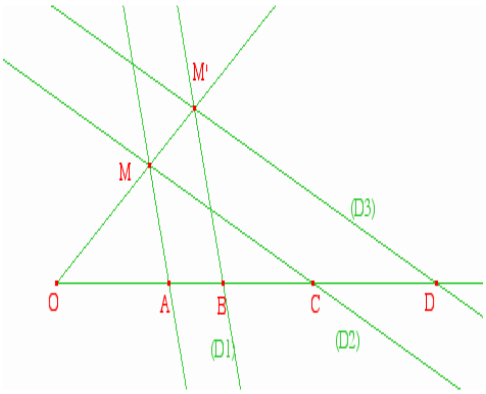
Soient O, A, B, C quatre points alignés. Le but de l'exercice est de construire l'image de C par l'homothétie H de centre O qui transforme A en B.
On admettra l'existence et l'unicité de cette homothétie H.

1. Soit $M \notin (OA)$. Construire l'image de la droite (AM) par H
2. En déduire la construction de l'image M' de M par H. Expliquer et justifier la méthode utilisée.
3. Construire l'image de C par H. Expliquer et justifier la méthode utilisée.

5.3.1 Corrigé

Soient O, A, B, C quatre points alignés. Le but de l'exercice est de construire D l'image de C par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre O qui transforme A en B.

Cette homothétie $\mathcal{H}$ est $\mathcal{H}(O; k)$ où $k = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$.



1. Soit $M \notin (OA)$. Comme $\mathcal{H} : A \longrightarrow B$ alors l'image de la droite (AM) par $\mathcal{H}$ est une droite (D_1) parallèle à (AM) passant par B
2. Soit M' l'image de M par $\mathcal{H}(O; k)$.
   — Le centre d'une homothétie, un point et son image étant alignés alors $M' \in (OM)$
   — Comme l'image de (AM) est (D_1) et que $M \in (AM)$ alors $M' \in (D_1)$
   — Par conséquent, M' est le point d'intersection de (OM) et de (D_1)
3. Soit $D = \mathcal{H}(C)$
   — On trace la droite $D_2 = (CM)$
   — Comme $M' = \mathcal{H}(M)$ alors l'image de la droite (D_2) passant par M est une droite (D_3) parallèle à (D_2) et passant par M'
   — Alors d'une part O, C et D sont alignés puisque $D = \mathcal{H}(O; k)(C)$
   — D'autre part, comme $C \in (D_2)$ alors l'image de C qui est $D \in (D_3)$ image de (D_2) par $\mathcal{H}$.
   — Par conséquent, D est le point d'intersection de (OC) et de (D_3)

5.4

Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2. Soit un point A tel que $OA = 3$. Soit M un point de $(\mathcal{C})$.
Soit N le milieu de $[AM]$.

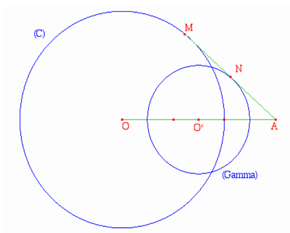
1. Quel est l'ensemble Γ décrit par N lorsque M décrit $(\mathcal{C})$?
2. Construire cet ensemble.

5.4.1 Corrigé

Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2. Soit un point A tel que $OA = 3$. Soit M un point de $(\mathcal{C})$.

— Soit N le milieu de $[AM]$ alors $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. Par conséquent N est l'image du point M par $\mathcal{H}(A; \frac{1}{2})$. Comme M décrit $\mathcal{C}(O; 2)$ et que l'homothétique du cercle $\mathcal{C}(O; 2)$ est un cercle de centre$H(O)$ et de rayon $\frac{1}{2}2 = 1$.

— Or $H(O) = O'$ tel que O' milieu de $[AO]$
— l'ensemble Γ décrit par N est le cercle $\mathcal{C}(O'; 1)$

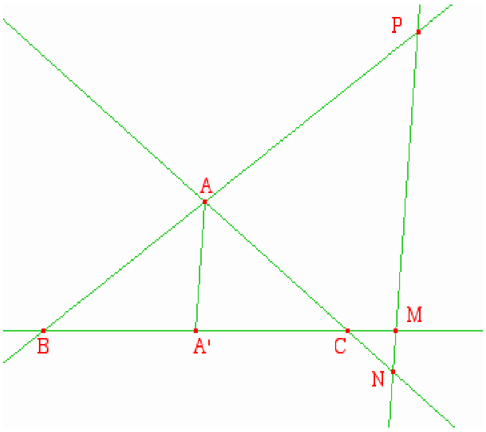


5.5

Soit un triangle ABC. Soit A' le milieu de $[BC]$. Une droite parallèle à (AA') coupe respectivement $(BC), (CA)$ et (AB) en M, N, P

Le but de l'exercice est de démontrer que $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{A'A}$

1. On pose $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC}$. Montrer qu'il existe une homothétie H de centre B dont on déterminera le rapport en fonction de α telle que $M = H(A')$
2. Montrer qu'il existe une homothétie H' de centre C dont on déterminera le rapport en fonction de α telle que $M = H'(A')$
3. Déterminer $H(A)$ et $H'(A)$
4. En déduire le résultat demandé.



5.5.1 Corrigé

Soit un triangle ABC. Soit A' le milieu de $[BC]$. Une droite parallèle à (AA') coupe respectivement $(BC), (CA)$ et (AB) en M, N, P

Le but de l'exercice est de démontrer que $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{A'A}$

1. $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA'}$ car A' est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{BM} = 2\alpha\overrightarrow{BA'}$. Par conséquent, l'homothétie $H'(B; 2\alpha)$ transforme A' en M
2. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{BC} = (1-\alpha)\overrightarrow{CB} = 2(1-\alpha)\overrightarrow{CA'}$. Par conséquent, l'homothétie $H(C; 2(1-\alpha))$ transforme A' en M
3. — $H(A)$ sera un point qui sera aligné avec B et A
   — Comme $H : A' \longrightarrow M$ alors l'image de la droite (AA') sera une droite parallèle à (AA') passant par M c'est-à-dire la droite (MNP).
   — Or $A \in (AA')$ donc $H(A) \in (MNP)$
   — Par conséquent, $H(A)$ est à l'intersection de la droite (BA) et de la droite (MNP) donc $\boxed{H(A) = P}$

   De même
   — $H'(A)$ sera un point qui sera aligné avec C et A
   — Comme $H' : A' \longrightarrow M$ alors l'image de la droite (AA') sera une droite parallèle à (AA') passant par M c'est-à-dire la droite (MNP).
   — Or $A \in (AA')$ donc $H'(A) \in (MNP)$
   — Par conséquent, $H'(A)$ est à l'intersection de la droite (AC) et de la droite (MNP) donc $\boxed{H(A) = N}$
4. Comme

$$\begin{array}{ccc} & H(B;2\alpha) & \\ A' & \longrightarrow & M \\ A & \longrightarrow & P \end{array}$$

alors $\overrightarrow{MP} = 2\alpha\overrightarrow{A'A}$
Comme

$$\begin{array}{ccc} & H'(C; 2(1-\alpha)) & \\ A' & \longrightarrow & M \\ A & \longrightarrow & N \end{array}$$

alors $\overrightarrow{MN} = 2(1-\alpha)\overrightarrow{A'A}$
Par conséquent, $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} = 2\alpha\overrightarrow{A'A} + 2(1-\alpha)\overrightarrow{A'A} = 2\overrightarrow{A'A}$.
On a donc prouvé que $\boxed{\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{A'A}}$

5.6

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Déterminer l'ensemble des homothéties transformant le segment $[AB]$ en le segment $[A'B']$.

5.6.1 Corrigé

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

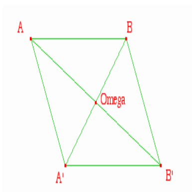
— **Analyse :**
Rechercher l'ensemble des homothéties transformant le segment $[AB]$ en le segment $[A'B']$ c'est rechercher l'ensemble des homothéties transformant soit le couple $(A; B)$ en le couple $(A'; B')$, soit le couple $(A; B)$ en le couple $(B'; A')$.
Si une homothétie $H(\Omega, k)$ satisfait au problème posé alors

1. soit
$$H(\Omega,k) : \begin{array}{ccc} A & \to & A' \\ B & \to & B' \end{array}$$
donc $\Omega \in (AA') \cap (BB')$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$
2. soit
$$H(\Omega,k) : \begin{array}{ccc} A & \to & B' \\ B & \to & A' \end{array}$$
donc $\Omega \in (AB') \cap (BA')$ et $\overrightarrow{B'A'} = k\overrightarrow{AB}$

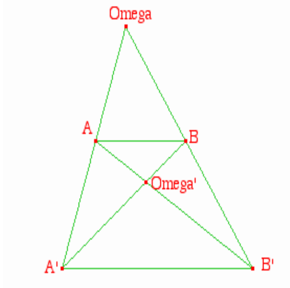
Forcément $(A'B')//(AB)$ et $\mid k \mid = \dfrac{A'B'}{AB}$

— **Synthèse :**

1. **Cas 1 :** (AB) **et** $(A'B')$ **ne sont pas parallèles.**
Alors d'après l'analyse précédente, il n'y a pas d'homothétie transformant le segment $[AB]$ en le segment $[A'B']$.
2. **Cas 2 :** $(AB)//(A'B')$ **et** $(AA')//(BB')$
Comme $(AA')//(BB')$ forcément d'après l'analyse précédente, il n'y a qu'une seule homothétie possible
$$H(\Omega,k) : \begin{array}{ccc} A & \to & B' \\ B & \to & A' \end{array}$$
avec $k = -\dfrac{A'B'}{AB}$



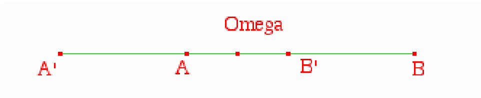
3. **Cas 3 :** $(AB)//(A'B')$ **et** (AA') **et** (BB') **ne sont pas parallèles**
D'après l'analyse précédente, il n'y a que 2 homothéties possibles
$$H(\Omega,k) : \begin{array}{ccc} A & \to & A' \\ B & \to & B' \end{array}$$
où $k = \dfrac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega A}} = \dfrac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega B}} = \dfrac{A'B'}{AB}$ et



$$H(\Omega', k') : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B' \\ B & \rightarrow & A' \end{array}$$

où $k' = \dfrac{\overline{\Omega' B'}}{\overline{\Omega' A}} = \dfrac{\overline{\Omega' A'}}{\overline{\Omega' B}} = -\dfrac{A'B'}{AB}$

4. **Cas 4 : A, B, A' et B' sont alignés et $\overline{AB} = \overline{A'B'}$**
   C'est un cas particulier du cas 2. Soit Ω milieu de $[BA']$ alors Ω est aussi milieu de $[AB']$ Il y a donc une seule homothétie qui convient , c'est $H(\Omega; -1)$ qui est aussi la symétrie centrale S_Ω de centre Ω



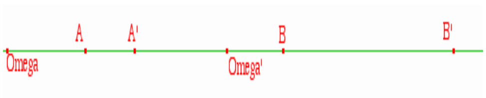
5. **Cas 5 : A, B, A' et B' sont alignés et $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$** D'après l'analyse précédente, il n'y a que 2 homothéties possibles .
   Notons a', b', a, b les abscisses respectives des points A', B', A, B et x l'abscisse du centre de l'homothétie **1ère homothétie :**

$$H(\Omega, k) : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A' \\ B & \rightarrow & B' \end{array}$$

où $k = \dfrac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega A}} = \dfrac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega B}} = \dfrac{A'B'}{AB}$ donc $k = \dfrac{a' - x}{a - x} = \dfrac{b' - x}{b - x}$ Or $k \neq 1$ et $k \neq -1$ car $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ donc $x(k-1) = ka - a'$ et $x(k-1) = kb - b'$

d'où Ω a pour abscisse $x = \dfrac{ka - a'}{k - 1} = \dfrac{kb - b'}{k - 1}$

2ème homothétie :



$$H(\Omega', k') : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B' \\ B & \rightarrow & A' \end{array}$$

où $k' = \dfrac{\overline{\Omega' B'}}{\overline{\Omega' A}} = \dfrac{\overline{\Omega' A'}}{\overline{\Omega' B}} = -\dfrac{A'B'}{AB}$ Or $k' \neq 1$ et $k' \neq -1$ car $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$

d'où Ω' a pour abscisse $x = \dfrac{k'a - b'}{k' - 1} = \dfrac{k'b - a'}{k' - 1}$

5.7 Une autre démonstration de Menelaüs

Soient un triangle ABC et trois points alignés P, Q et R appartenant respectivement aux droites $(BC), (CA)$ et (AB). On supposera que ces trois points P, Q et R sont distincts des sommets du triangle ABC.

1. Démontrer que la composée d'homothéties $H\left(Q, \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right)$ o $H\left(P, \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right)$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
2. En déduire que l'on a :
$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = 1$$

5.7.1 Corrigé

Soient un triangle ABC et trois points alignés P, Q et R appartenant respectivement aux droites $(BC), (CA)$et (AB). On supposera que ces trois points P, Q et R sont distincts des sommets du triangle ABC.

1. Soit $f = H\left(Q, \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right)$ o $H\left(P, \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right)$.
   — f étant la composée d'homothétie-translations est donc une homothétie-translation.
   — Comme $H\left(Q, \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right)$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle h_{k_2} où $k_2 = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$
   — Comme $H\left(P, \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right)$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle h_{k_1} où $k_1 = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$
   — Alors f est une application affine d'endomorphisme associé h_{k_2} o $h_{k_1} = h_{k_2 \times k_1}$
   Soit $k = k_1 \times k_2 = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$.
   — Si $k = 1$ alors f sera une translation.
   — Si $k \neq 1$ alors f aura un seul point invariant Ω et f sera une homothétie $\mathcal{H}(\Omega, k)$.
   Démontrons par l'absurde que $k \neq 1$.
   Supposons que $k = 1$ alors f sera une translation de vecteur $\vec{u}$.
   Or
$$H\left(P, \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right) : \quad B \quad \to \quad C$$
   et
$$H\left(Q, \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right) : \quad C \quad \to \quad A$$
   Donc
$$f : \quad B \quad \to \quad A$$
   Donc $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$
   Mais
$$H\left(P, \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right) : \quad P \quad \to \quad P$$
   et
$$H\left(Q, \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right) : \quad P \quad \to \quad P'$$
   avec Q, P et P' alignés.
   Alors $f : P \to P'$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$ alors $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PP'}$ Cela entraîne que (AB) et (PP') seraient parallèles ce

qui n'est pas vrai.
Par conséquent $k \neq 1$ et f aura un seul point invariant Ω et f sera l'homothétie $\mathcal{H}(\Omega, k)$.

— Comme $f = H\left(Q, \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right)$ o $H\left(P, \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right)$ alors $\Omega \in (PQ)$
— Mais $\mathcal{H}(\Omega, k) : B \rightarrow A$ donc $\Omega \in (BA)$
— Donc $\Omega \in (AB) \cap (PQ)$. Par conséquent, $\Omega = R$

Par conséquent, $\boxed{f = \mathcal{H}(R, \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}})}$

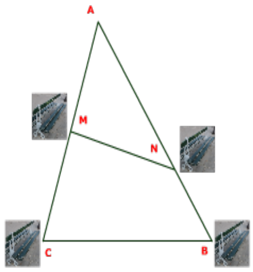
2. Mais comme $\mathcal{H}(R, k) : B \rightarrow A$ donc $k = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ on en déduit que l'on a : $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.

   D'où $\boxed{\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \times \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = 1}$

5.8 Les 4 bancs publics de Terracher

Mr TERRACHER fut un brillant professeur de Mathématiques volontaire à l'aide technique pendant 2 ans en Martinique où il enseigna en Terminale C2 au Lycée Schoellcher. J'eus l'honneur de lui succéder dans cette classe. Il fut également Irémien, universitaire à Bordeaux et auteur de manuels scolaires célèbres pour des exercices très originaux tel celui ci-dessous..

Le parc d'une cité a une forme triangulaire aigüe avec 2 bancs publics à 2 extrémités :



Le responsable de l'aménagement voudrait tracer une allée qui traverserait le parc de part en part.
Pensant aux personnes âgées, il voudrait installer à nouveau 2 bancs publics aux extrémités de cette allée, mais de manière que les 4 bancs(les deux existants et les deux à venir) soient à égale distance (c'est-à- dire que $CM = MN = NB$ sur le schéma).
Soit $M \in [AC]$ et $N \in [AB]$. Soit N' l'intersection de (CN) avec une droite (Δ) parallèle à (BC) passant par A. Soit H l'homothétie de centre C qui transforme N en N'.

1. Construire les points $M' = H(M)$ et $B' = H(B)$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $BAN'B'$? En déduire que $N'B' = AB$.
3. Démontrer que $\{M, N\}$ est solution du problème posé si et seulement si $CM' = M'N' = AB$.
4. En déduire la construction demandée.

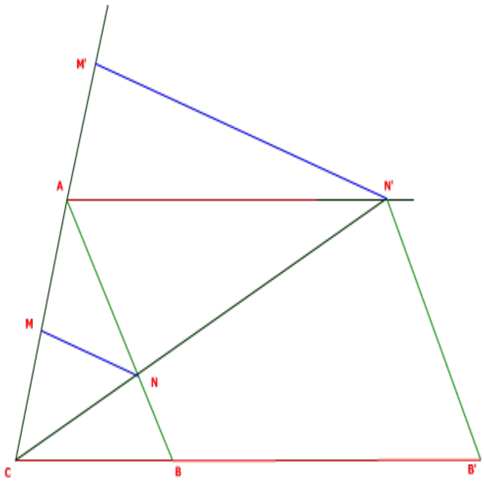
5.8.1 Corrigé

1. $$H(C,k): \begin{array}{ccc} N & \to & N' \\ M & \to & M' \end{array}$$

   donc $M' = H(M)$ est situé sur la droite (CB) et aussi sur la droite parallèle à (BN) passant par N'.

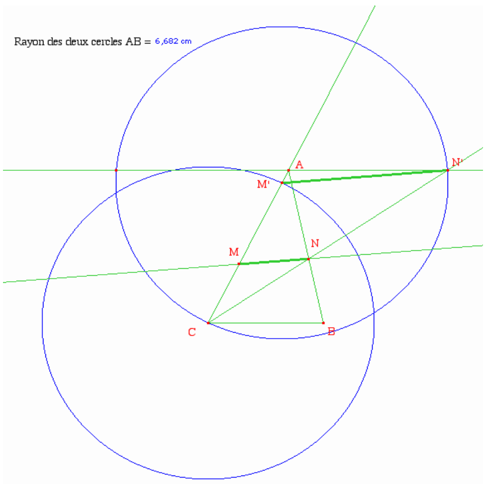
   $$H(C,k): \begin{array}{ccc} N & \to & N' \\ B & \to & B' \end{array}$$

   donc $B' = H(B)$ est situé sur la droite (CM) et aussi sur la droite parallèle à (MN) passant par N'.
2. Comme :
   — les droites (BC) et (Δ) sont parallèles.
   — La droite (AN') est la droite (Δ) et la droite (BB') est la droite (BC)
   — donc les droites (AN') et (BB') sont parallèles.
   — De plus les droites (AB) et $(N'B')$ sont parallèles



donc le quadrilatère $BAN'B'$ est un parallélogramme donc $N'B' = AB$.

3. $\{M, N\}$ est solution du problème posé $\iff CM = MN = NB \iff |k|CM = |k|MN = |k|NB \iff CM' = M'N' = N'B' \iff CM' = M'N' = AB$
4. On en déduit une construction de M' et de N' puis de N et enfin de M.



   (a) On crée M' intersection du cercle de centre C et de rayon AB avec la demi-droite $[CA)$
   (b) On crée ensuite N' intersection du cercle de centre M' et de rayon AB avec la droite (Δ)
   (c) Le point N est donc le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite (CN')
   (d) Et enfin le point M est le point d'intersection de la droite (CA) avec la parallèle à la droite $(N'M')$ passant par N.

5.9 Baccalauréat

A et B sont deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.
A tout point M de $\mathcal{P}$, on associe I milieu de $[AM]$, J milieu de $[BM]$, E milieu de $[AJ]$ et F milieu de $[BI]$.
Soit les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & E \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & F \end{array}$$

1. Démontrer que f et g sont des homothéties dont on déterminera les rapports λ_1 et λ_2 et les centres Ω_1 et Ω_2
2. Soit C un point de $\mathcal{P}$. On pose $E_0 = F_0 = C$ et $\forall n \in \mathbb{N} \qquad E_n = f(E_{n-1}) \qquad F_n = g(F_{n-1})$.
   Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \|\overrightarrow{E_nF_n}\|$.
   Démontrer que u est une suite convergente et déterminer sa limite.

5.9.1 Corrigé