Applications linéaires

Christian CYRILLE

24 mars 2021

1 Définitions

1.1 Définition initiale

Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ des espaces vectoriels réels.
On dit que

$$f: \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{F} \\ \vec{u} & \longmapsto & \overrightarrow{f(\vec{u})} \end{array}$$

est une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ lorsque f vérifie les deux propriétés suivantes :

- $$P_1 : \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad f(\vec{u}+\vec{v}) = \overrightarrow{f(\vec{u})} + \overrightarrow{f(\vec{v})}$$

  c'est-à-dire que l'image d'une somme de vecteurs est la somme des images de ces vecteurs.
- $$P_2 : \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad f(\lambda\vec{u}) = \lambda\overrightarrow{f(\vec{u})}$$

  c'est-à-dire que l'image de la multiplication d'un réel par un vecteur est la multiplication de ce réel par l'image de ce vecteur.

1.2 Définition équivalente

Les propriétés P_1 et P_2 sont équivalentes à la propriété suivante :

$$P_3 : \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\overrightarrow{f(\vec{u})} + \beta\overrightarrow{f(\vec{v})}$$

c'est-à-dire que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images de ces vecteurs.
ou encore à la propriété

$$P_3' : \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\overrightarrow{f(\vec{u})} + \overrightarrow{f(\vec{v})}$$

1.3 Notations

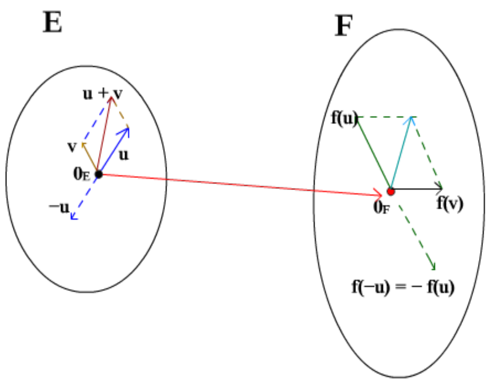
- Une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ s'appelle un **homomorphisme** de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$.
  L'ensemble des applications de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ se note : $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$
- Une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ s'appelle un **endomorphisme** de $\vec{E}$.
  L'ensemble des endomorphismes de $\vec{E}$ se note : $\mathcal{L}(\vec{E})$
- Une application linéaire **bijective** de $\vec{E}$dans $\vec{F}$ s'appelle un **isomorphisme** de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$.
  L'ensemble des isomorphismes de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ se note : $\mathcal{GL}(\vec{E};\vec{F})$.
  $\mathcal{GL}(\vec{E};\vec{F})$ muni de la loi de composition des applications o est un groupe qu'on appelle le groupe linéaire de $\vec{E}$.
- Un endomorphisme bijectif s'appelle un **automorphisme** de $\vec{E}$.
  L'ensemble des automorphismes de $\vec{E}$ se note : $\mathcal{AUT}(\vec{E})$.
- On appelle **forme linéaire** de $\vec{E}$ toute application de $\vec{E}$ dans $\mathbb{R}$.

2 Propriétés

Soit f une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ alors :

$$P_4 : f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$$

$$P_5 : \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$$



2.1 Démonstration

1. Méthode 1 pour P_4 :
   $f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = f(0.\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = 0.f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$ d'après P_2
   Par conséquent , $\quad f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$
2. Méthode 2 pour P_4 :
   $f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}} + \overrightarrow{0_{\vec{E}}})) = f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) + f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}})$ d'après P_1
   Par conséquent, $\quad 2f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}})$ donc $f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$
3. $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad f(-\vec{u}) = f((-1).\vec{u}) = (-1).f(\vec{u}) = -f(\vec{u})$ d'après P_2

3 Exemples

3.1 La fonction nulle

La fonction nulle
$$\begin{array}{rccc} \Theta: & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \vec{u} & \longmapsto & f(\vec{u}) = \vec{0} \end{array}$$
est un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$

3.2 La fonction Identité

La fonction Identité
$$\begin{array}{rccc} Id_{\overrightarrow{E}}: & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \vec{u} & \longmapsto & f(\vec{u}) = \vec{u} \end{array}$$
est un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$

3.3 L'homothétie vectorielle

L'homothétie vectorielle h_λ de rapport λ
$$\begin{array}{rccc} h_\lambda: & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \vec{u} & \longmapsto & h_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \end{array}$$
est un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$

3.4 La fonction linéaire en dimension 1

La fonction linéaire f_a
$$\begin{array}{rccc} f_a: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_a(x) = ax \end{array}$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}$ donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}$

3.5 La fonction linéaire en dimension 2

La fonction f
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (ax+by, cx+dy) \end{array}$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

3.6 La fonction linéaire en dimension 3

La fonction k
$$\begin{array}{rccc} k: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & k(x,y,z) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz) \end{array}$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

3.7 Trace d'une matrice

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ Alors la fonction Trace Tr

$$\begin{array}{rccc} Tr : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M = (a_{i,j}) & \longmapsto & Tr(M) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,i} \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
car $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B) et Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$

On a pour la trace d'une matrice une propriété supplémentaire :
$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad Tr(AB) = Tr(BA)$

3.8 La fonction Dérivée

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

- L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- L'application Dérivée Der

$$\begin{array}{rccc} Der : & \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & Der(f) = f' \end{array}$$

est une application linéaire.

3.9 La fonction Intégrale

Soit $I = [a; b]$ un intervalle non vide de $/R$.

- L'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- L'application Intégrale Int

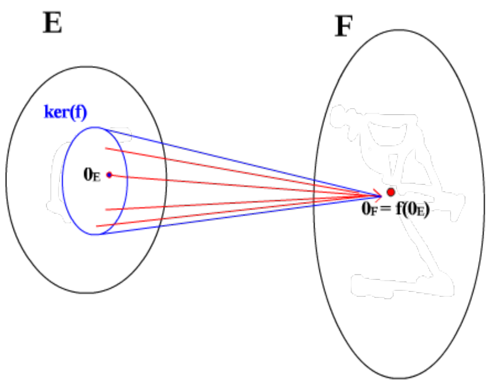
$$\begin{array}{rccc} Int : & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & Int(f) = \int_a^b f(t)dt \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

4 Noyau d'une application linéaire

4.1 Définition

Soit f une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$.
On appelle noyau de f qu'on note $ker(f)$ ou $N(f)$ l'ensemble suivant
$ker(f) = \{\vec{u} \in \overrightarrow{E} \,/\, f(\vec{u} = \vec{0}\}$



4.2 Propriétés

4.2.1

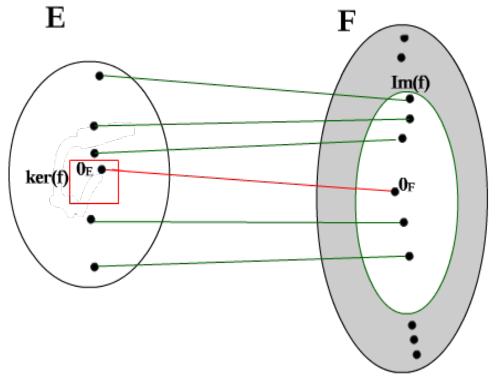
P_5 : $ker(f)$ est un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$

Démonstration :

- $ker(f) \subset \overrightarrow{E}$ et $ker(f) \neq \emptyset$ car $\overrightarrow{0_{\vec{E}}} \in ker(f)$ puisque $f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{u} \in ker(f)$ $\quad \vec{v} \in ker(f)$ alors : $f(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \alpha\overrightarrow{0_{\vec{F}}} + \overrightarrow{0_{\vec{F}}} = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$ donc $\alpha\vec{u} + \vec{v} \in Ker(f)$
- D'après les 2 propriétés précédentes, $ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$

4.2.2

> $P_6 : ker(f) = \{\vec{0}\} \iff f$ est injective



Démonstration :

1. $\Longrightarrow$:
   Supposons que $ker(f) = \{\vec{0}\}$. Nous allons démontrer que f est injective.
   Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$ si $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$ alors $f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$ donc $f(\vec{u} - \vec{v}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$ car f est linéaire.
   Donc $\vec{u} - \vec{v} \in Ker(f)$ Or $ker(f) = \{\overrightarrow{0_{\vec{E}}}\}$ donc $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{0_{\vec{E}}}$ donc $\vec{u} = \vec{v}$. CQFD.
2. $\Longleftarrow$:
   Supposons que f est injective.
   - D'une part, $\overrightarrow{0_{\vec{E}}} \in ker(f)$ donc $\{\overrightarrow{0_{\vec{E}}}\} \subset ker(f)$.
   - D'autre part, nous allons démontrer que $ker(f) \subset \{\overrightarrow{0_{\vec{E}}}\}$.
     Soit $\vec{u} \in ker(f)$ alors $f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_{\vec{F}}}$ donc $f(\vec{u}) = f(\overrightarrow{0_{\vec{E}}})$.
     Or f est injective donc $\vec{u} = \overrightarrow{0_{\vec{E}}}$ d'où $\vec{u} \in \{\overrightarrow{0_{\vec{E}}}\}$.CQFD.
   - Comme $\{\overrightarrow{0_{\vec{E}}}\} \subset ker(f)$ et $ker(f) \subset \{\overrightarrow{0_{\vec{E}}}\}$ alors $ker(f) = \{\overrightarrow{0_{\vec{E}}}\}$
3. On en déduit que $ker(f) = \{\vec{0}\} \iff f$ est injective.

4.2.3

> P_7 : Si f est une application linéaire **injective** de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$ alors l'image d'une famille **libre** d'éléments de $\overrightarrow{E}$ est une famille **libre** d'éléments de $\overrightarrow{F}$ **ayant le même nombre d'éléments**.

Démonstration :
Soit $\mathcal{L}$ une famille libre $(\vec{l_1}, \cdots, \vec{l_n})$ de n éléments.
Notons $f < \mathcal{L} >= \{f(\vec{l_1}), \cdots, f(\vec{l_n})\}$

- Alors comme f est injective tous les $f(\vec{l_i})$ sont distincts deux à deux.
- Pour démontrer que $f < \mathcal{L} >$ est libre, nous allons prouver que toute combinaison linéaire nulle de ses éléments entraine que tous les coefficients e cette combinaison sont nuls.

Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{l_i}) = \overrightarrow{0_F}$ donc $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{l_i}\right) = \overrightarrow{0_F}$ car f est linéaire.

Par conséquent, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{l_i} \in ker(f)$. Or f est injective, donc $ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

On a donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{l_i} = \overrightarrow{0_E}$. or la famille $\mathcal{L}$ est libre donc $\forall i \in [|1;n|] \quad \lambda_i = 0$. CQFD.

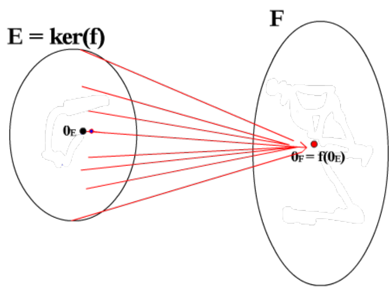
4.2.4

> P_8 : Réciproque de P_7 :
> Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F.
>
> $$\text{L'image de toute partie libre est libre} \implies f \text{ est injective}$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas injective donc $ker(f) \neq \{0\}$.
Par conséquent, $\exists x \neq 0 \quad f(x) = 0$.
Donc $\exists x_1 \in E \quad \exists x_2 \in E \quad (x_1, x_2)$ est libre avec $x = x_1 + x_2$.
Comm l'image de toute partie libre est libre alors $(f(x_1), f(x_2))$ est libre.
Ceci est impossible car $0 = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ donc la famille $(f(x_1), f(x_2))$ est liée.
Par conséquent, $ker(f) = \{0\}$ donc f est injective.

4.2.5

> P_9 : $ker(f) = \overrightarrow{E} \iff f$ est la fonction nulle Θ

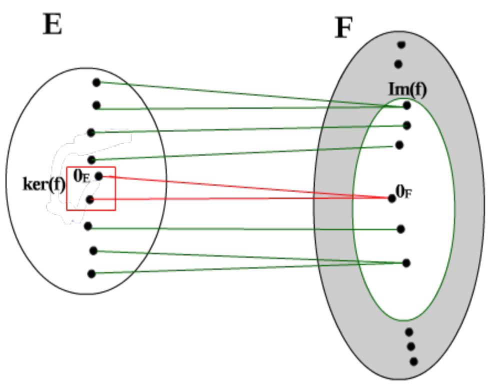


1. $\implies$:
   Si $ker(f) = \overrightarrow{E}$ alors $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{E}$ on a $\vec{u} \in ker(f)$ donc $f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_F}$ donc $f = \Theta$
2. $\impliedby$:
   Si $f = \Theta$ alors $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{E} \quad f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_F}$ donc $\vec{u} \in ker(f)$ donc $\overrightarrow{E} \subset ker(f)$.
   Or on sait déjà que $ker(f) \subset \overrightarrow{E}$ donc $ker(f) = \overrightarrow{E}$

5 Ensemble-Image d'une application linéaire

5.1 Définition

Soit f une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$.
On appelle ensemble-image de $\overrightarrow{E}$ par f qu'on note $f < \overrightarrow{E} >$ ou $Im(f)$ l'ensemble suivant
$Im(f) = \{\vec{v} \in \overrightarrow{F} / \exists \vec{u} \in \overrightarrow{E} \quad \vec{v} = f(\vec{u})\}$



5.2 Propriétés

5.2.1

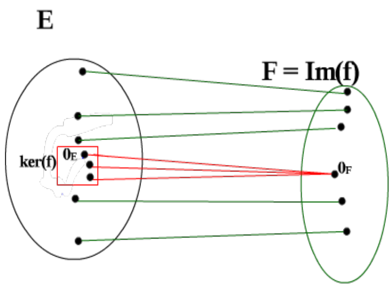
P_9 : $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{F}$

Démonstration :

- $Im(f) \subset \overrightarrow{F}$ et $Im(f) \neq \emptyset$ car $\overrightarrow{0_F} \in Im(f)$ puisque $\overrightarrow{0_F} = f(\overrightarrow{0_E})$
- Soient $\alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{u'} \in Im(f) \quad \vec{v'} \in Im(f)$ alors $\exists \vec{u} \in \vec{E} \quad \vec{u'} = f(\vec{u})$ et $\exists \vec{v} \in \vec{E} \quad \vec{v'} = f(\vec{v})$
  Alors $\alpha\vec{u'} + \vec{v'} = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = f(\alpha\vec{u} + \vec{v})$. Or $\alpha\vec{u} + \vec{v} \in \vec{E}$ donc $\alpha\vec{u'} + \vec{v'} \in Im(f)$
- D'après les 2 propriétés précédentes, $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{F}$

5.2.2

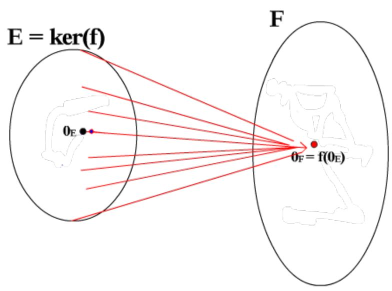
> $P_{10} : Im(f) = \overrightarrow{F} \iff f$ est surjective.



Démonstration évidente : c'est la définition même de la surjectivité.

5.2.3

> $P_{11} : Im(f) = \{0_{\overrightarrow{F}}\} \iff f$ est la fonction nulle Θ



1. $\Longrightarrow$:
   Supposons $Im(f) = \{0_{\overrightarrow{F}}\}$
   $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{E}$ on a $f(\vec{u}) \in Im(f)$. Or $Im(f) = \{0_{\overrightarrow{F}}\}$
   donc $f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_F}$ donc $f = \Theta$
2. $\Longleftarrow$:
   Supposons $f = \Theta$
   $\forall \vec{u'} \in Im(f) \quad \exists \vec{u} \in \vec{E} \quad \vec{u'} = f(\vec{u})$. Or $f = \Theta$ donc $f(\vec{u}) = 0_{\overrightarrow{F}}$ d'où $\vec{u'} = 0_{\overrightarrow{F}}$.
   On a donc $Im(f) \subset \{0_{\overrightarrow{F}}\}$.
   Or on sait déjà que $\{0_{\overrightarrow{F}}\} \subset Im(f)$ donc $Im(f) = \{0_{\overrightarrow{F}}\}$

5.2.4 Famille génératrice de $Im(f)$

P_{12} : Si $\overrightarrow{E}$ a une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ alors :

1. tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$ donc $f(\vec{u}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overrightarrow{e_i})$
2. Par conséquent , $Im(f)$ **est le sous espace vectoriel engendré par la famille** $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n}))$
3. Si f est injective alors la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n}))$ est libre donc est une base de $Im(f)$
4. Si f est surjective alors la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n}))$ engendre $\overrightarrow{F}$
5. Si f est bijective alors la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n}))$ est une base de $\overrightarrow{F}$

5.3 Théorème de la dimension ou Théorème du rang

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f un endomorphisme de E. On appelle $rang(f) = dim(Im(f))$.
Alors
$$dim(\overrightarrow{E}) = dim(ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(ker(f)) + rang(f)$$

5.4 Corollaire

Soient $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ des espaces vectoriels de **même dimension finie**.
Soit f une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$.
Alors on a les équivalences logiques suivantes :

f est injective

$$\Updownarrow$$

$$ker(f) = \{0_{\overrightarrow{E}}\}$$

$$\Updownarrow$$

$$dim(\overrightarrow{F}) = dim(\overrightarrow{E}) = dim(Im(f))$$

$$\Updownarrow$$

f est surjective

$$\Updownarrow$$

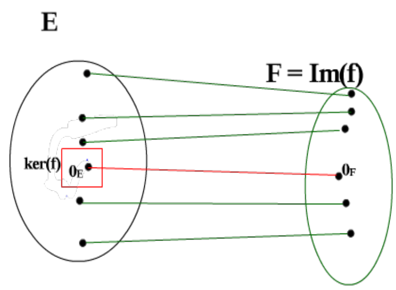
f est bijective

$$\Updownarrow$$

f est un isomorphisme de $\overrightarrow{E}\, sur\, \overrightarrow{F}$

$$\Updownarrow$$

l'image d'une base de $\overrightarrow{E}$ est une base de $\overrightarrow{F}$



6 Espaces d'applications linéaires

6.1 L'espace vectoriel des applications linéaires

1. L'ensemble des applications linéaires de l'ev $\overrightarrow{E}$ vers l'ev $\overrightarrow{F}$ noté $\mathcal{L}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel réel.
2. Si $dim(\overrightarrow{E}) = n$ et $dim(\overrightarrow{F}) = p$ alors $dim(\mathcal{L}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})) = np$.
3. Si $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\overrightarrow{E}$ et $(\vec{f_j})_{1 \leq j \leq p}$ une base de $\overrightarrow{F}$ alors une base de $\mathcal{L}(\overrightarrow{E}, F)$ est la famille $(l_{(i,j)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ où $l_{(i,j)}(\vec{e_k}) = \delta_i^k \vec{f_j}$

6.2 L'algèbre des endomorphismes

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ noté $End(\overrightarrow{E})$ ou $\mathcal{L}(\overrightarrow{E})$ muni de l'addition, de la multiplication par un scalaire, de la loi de composition $\circ$ est une $\mathbb{K} - algbre$

6.3 Groupe des automorphismes

L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ noté $GL(\overrightarrow{E})$ muni de de la loi de composition $\circ$ est un groupe.

7 Matrices et applications linéaires

7.1 Définition

Soient $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ des espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectives p et n.
Soient $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $\overrightarrow{E}$.
Soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_n})$ une base de $\overrightarrow{F}$.
Soit f une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$.
Alors la matrice M de format (n, p) dont les p vecteurs colonnes sont les coordonnées de $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_n})$ est alors appelée la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$

$$M = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & & f(\overrightarrow{e_p}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \\ \\ \overrightarrow{f_n} \end{array} \end{array}$$

7.2 Exemples

7.2.1

Si $dim(\overrightarrow{E}) = n$ alors la matrice de la fonction nulle

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \vec{u} & \longmapsto & \Theta(\vec{u}) = \vec{0} \end{array}$$

est la matrice nulle.

$$\boxed{Mat(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = O}$$

7.2.2

Si $dim(\overrightarrow{E}) = n$ alors la matrice de la fonction Identité

$$\begin{array}{rccc} Id_{\overrightarrow{E}} : & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \vec{u} & \longmapsto & Id_{\overrightarrow{E}}(\vec{u}) = \vec{u} \end{array}$$

est la matrice identité I_n de dimension n.

$$\boxed{Mat(Id, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n}$$

7.2.3

Si $dim(\overrightarrow{E}) = 3$ alors la matrice de l'homothétie vectorielle h_λ de rapport λ

$$\begin{array}{rccc} h_\lambda : & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \vec{u} & \longmapsto & h_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \end{array}$$

est la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\boxed{Mat(h_\lambda, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \lambda I}$$

7.2.4

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = \{(1;0);(0;1)\}$ alors l'endomorphisme f

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (ax+by, cx+dy) \end{array}$$

a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\boxed{Mat(f, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

7.2.5

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = \{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}$ alors l'endomorphisme k

$$\begin{array}{rccc} k : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & k(x,y,z) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz) \end{array}$$

a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\boxed{Mat(f, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}$$

8 Matrice de passage d'une base à une autre base

8.1 Définition

Soit l'espace vectoriel E de dimension finie n munie de deux bases :
une ancienne notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$
et une nouvelle base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \cdots, \overrightarrow{e'_n})$.

$$\begin{array}{cccc} Id: & (E, \mathcal{B}') & \longrightarrow & (E, \mathcal{B}) \\ & e'_1 & \longmapsto & Id(e'_1) = e'_1 \\ & e'_2 & \longmapsto & Id(e'_1) = e'_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & e'_n & \longmapsto & Id(e'_n) = e'_n \end{array}$$

- La matrice de passage de l'ancienne base $\mathcal{B}$ à la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est par définition la matrice de l'Id relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ dans cet ordre.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} Id(\overrightarrow{e'_1}) & Id(\overrightarrow{e'_2}) & & Id(\overrightarrow{e'_n}) \end{array} \\ P = Mat(Id, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \\ \overrightarrow{e_n} \end{array} \end{array} \quad \text{est inversible}$$

  P^{-1} est la matrice de passage de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ à l'ancienne base $\mathcal{B}$.
- Si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$
- Si on note $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$

Alors $\boxed{X = PX'}$ d'où $\boxed{X' = P^{-1}X}$

Attention à l'ordre des bases ! ! !

8.2 Exemple

Soit l'espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et soit la nouvelle base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2})$ avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{e'_1} = \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e'_2} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \end{cases}$$

Ecrire les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$ en fonction de ses composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Méthode 1 :
   $\vec{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'\overrightarrow{e'_1} + y'\overrightarrow{e'_2}$
   donc $x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'\overrightarrow{e_1}) + y'(-2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$.
   Par conséquent, $x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = (x' - 2y')\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2})$.
   A cause de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on a donc :
   $$\begin{cases} x' - 2y' = x \\ y' = y \end{cases}$$
   d'où
   $$\begin{cases} x' - 2y = x \\ y' = y \end{cases}$$
   donc
   $$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \end{cases}$$

2. Méthode 2 :
   La matrice de passage de l'ancienne base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ vers la nouvelle base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2})$ est la matrice P dont les vecteurs colonnes représentent les coordonnées $\mathcal{B}'$ de la nouvelle base dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:
   $$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Id(\overrightarrow{e'_1}) & Id(\overrightarrow{e'_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{array}$$
   P est inversible car $det(P) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Alors $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}X = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix}$

8.3 Exemple

Soit l'espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B} = \{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ et soit la nouvelle base $\mathcal{B}' = \{(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\}$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{e'_1} = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e'_2} = \overrightarrow{e_1} + 7\overrightarrow{e_2} \end{array} \right.$$

Ecrire les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$ en fonction de ses composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Méthode 1 :
   $\vec{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'\overrightarrow{e'_1} + y'\overrightarrow{e'_2}$
   donc $x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'(2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}) + y'(\overrightarrow{e_1} + 7\overrightarrow{e_2})$.
   Par conséquent, $x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = (2x' + y')\overrightarrow{e_1} + (5x' + 7y')\overrightarrow{e_2})$.
   A cause de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base ona donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x' + y' = x \\ 5x' + 7y' = y \end{array} \right.$$

   d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} 14x' + 7y' = 7x \\ -5x' - 7y' = -y \end{array} \right.$$

   d'où $9x' = 7x - y$ d'où $x' = \dfrac{7x - y}{9}$. On en déduit que $y' = x - 2x' = x - 2\dfrac{7x - y}{9} = \dfrac{9x - 14x + 2y}{9} = \dfrac{-5x + 2y}{9}$

2. Méthode 2 :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Id(\overrightarrow{e'_1}) & Id(\overrightarrow{e'_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{array}$$

   P est inversible car $det(P) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{det(P)} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

   Alors $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}X = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(7x - y) \\ \frac{1}{9}(-5x + 2y) \end{pmatrix}$

9 Exercices

9.1 Exercice

Démontrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f((x,y)) = x - 2y$
2. $g : \mathbb{R}_2[X] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(P) = P(1)$
3. $h : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(P) = P^{(k)}(0)$
4. $\phi : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\phi(P) = XP' - 3P = x - 2y$
5. $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $\psi((x,y)) = (2x - y; x + 3y)$
6. $F : \mathcal{C}^0(R,R) \mapsto \mathcal{C}^0(R,R)$ définie par $F(f)(x) = \displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt$

9.2 Exercice

Soient l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & \phi((x,y)) = (x-y, y-x, 0) \end{array}$$

1. Démontrer qu'elle est linéaire
2. Déterminer $ker(\phi)$ et $Im(\phi)$ en précisant une base. ϕ est -elle injective ?
3. Déterminer $Im(\phi)$ en précisant une base. ϕ est -elle surjective ?

9.2.1 Corrigé

1.
   - Méthode 1 : d'après son expression analytique, ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
   - Méthode 2 : Soient $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{v} = (x',y') \in \mathbb{R}^2 \alpha \in \mathbb{R}$ alors :
   $\phi(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \phi(\alpha(x,y) + (x',y')) = \phi((\alpha x, \alpha y) + (x',y')) = \phi((\alpha x + x', \alpha y + y'))$
   $= (\alpha x + x' - \alpha y - y', \alpha y + y' - \alpha x - x', 0) = (\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha x, 0) + (x' - y', y' - x', 0)$
   $= \alpha(x - y, y - x, 0 + (x' - y', y' - x') = \alpha\phi((x,y)) + \phi(x',y')$
   $= \alpha\ \phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v})$ donc ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$
2.
   - $\vec{u} \in ker(\phi) \iff \phi(\vec{u}) = \vec{0} \iff (x-y, y-x, 0) = (0,0,0) \iff \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{array} \right. \iff$
   $x = y \iff (x,y) = (x,x) = x(1,1)$
   - Par conséquent, $ker(\phi) = Vect((1,1))$ = le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F} = ((1,1))$
   - Comme cette famille est formée d'un seul élément $(1,1)$ qui n'est pas le vecteur nul alors cette famille est libre.
   - Cette famille étant génératrice et libre est donc une base de $ker(\phi)$ qui est donc de dimension 1.
   $ker(\phi)$ est la droite vectorielle de base $((1,1)$
   - Comme $\ker(\phi) \neq \vec{0}$ alors ϕ n'est pas injective donc n'est pas bijective.
3.
   - D'après le théorème du rang, $dim(\mathbb{R}^2) = dim(ker(\phi)) + dim(Im(\phi))$
   donc $2 = 1 + dim(Im(\phi))$. Par conséquent, $Im(\phi))$ est une droite vectorielle

- On sait que $Im(\phi)$ est engendré par les images par ϕ des vecteurs de la base de l'espace vectoriel de départ.
  Or $\mathbb{R}^2$ a pour base , la base canonique $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$
  donc $Im(\phi) = Vect(\phi((1,0)), \phi((0,1))) = Vect((1,-1,0);((-1,1,0))$
  Mais ces deux vecteurs $(1,-1,0)$ et $((-1,1,0)$sont liés donc $Im(\phi) = Vect((1,-1,0)$.
  La famille formée du seul élément $(1,-1,0)$ qui n'est pas le vecteur nul est donc libre et devient alors une base de $Im(\phi)$.
- Comme l'on sait que $Im(\phi)$ est une droite vectorielle alors $Im(\phi))$ a pour base $(-1,1,0)$
- Comme $Im(\phi) \neq \vec{F} = \mathbb{R}^3$ alors ϕ n'est pas surjective.

9.3 Exercice

Soient l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \phi((x,y,z)) = (x-y, y-z, z-x) \end{array}$$

1. Démontrer qu'elle est linéaire
2. Déterminer $ker(\phi)$ et $Im(\phi)$ en précisant une base. ϕ est -elle injective ?
3. Déterminer $Im(\phi)$ en précisant une base. ϕ est -elle surjective ?

9.3.1 Corrigé

1.
   - Méthode 1 : d'après son expression analytique, ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
   - Méthode 2 : Soient $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{v} = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \alpha \in \mathbb{R}$ alors :
     $\phi(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \phi(\alpha(x,y,z) + (x',y',z')) = \phi((\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (x',y',z'))$
     $= \phi((\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z'))$
     $= (\alpha x + x' - \alpha y - y', \alpha y + y' - \alpha z - z', \alpha z + z' - \alpha x - x')$
     $= (\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha z, \alpha z - \alpha x) + (x' - y', y' - z', z' - x')$
     $= \alpha(x-y, y-z, z-x) + (x'-y', y'-z', z'-x') = \alpha\phi((x,y,z)) + \phi(x',y',z')$
     $= \alpha\ \phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v})$ donc ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
2.
   - $\vec{u} \in ker(\phi) \iff \phi(\vec{u}) = \vec{0} \iff (x-y, y-z, z-x) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{array}\right.$
     $\iff \left\{\begin{array}{l} x=x \\ y=x \\ z=x \end{array}\right. \iff (x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$
   - Par conséquent, $ker(\phi) = Vect((1,1))$ = le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F} = ((1,1))$
   - Comme cette famille est formée d'un seul élément $(1,1,1)$ qui n'est pas le vecteur nul alors cette famille est libre.
   - Cette famille étant génératrice et libre est donc une base de $ker(\phi)$ qui est donc de dimension 1.
     $ker(\phi)$ est la droite vectorielle de base $((1,1,1))$
   - Comme $\ker(\phi) \neq \vec{0}$ alors ϕ n'est pas injective donc n'est pas bijective.
3.
   - D'après le théorème du rang, $dim(\mathbb{R}^3) = dim(ker(\phi)) + dim(Im(\phi))$
     donc $3 = 1 + dim(Im(\phi))$. Par conséquent, $Im(\phi))$ est un plan vectoriel.

- On sait que $Im(\phi)$ est engendré par les images par ϕ des vecteurs de la base de l'espace vectoriel de départ.
  Or $\mathbb{R}^3$ a pour base , la base canonique $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$
  donc $Im(\phi) = Vect(\phi((1,0,0)),\phi((0,1,0)),\phi((0,0,1)) = Vect((1,0,-1);((-1,1,0);((0,-1,1))$
  Mais cette famille n'est pas libre car $\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\beta \in \mathbb{R} \quad \forall\gamma \in \mathbb{R}\alpha(1,0,-1)+\beta(-1,1,0)+\gamma(0,-1,1) = (0,0,0$
  $\Longrightarrow (\alpha-\beta,\beta-\gamma,-\alpha+\gamma) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma$
  Ils ne sont pas forcément tous nuls simultanément.
  Par contre, les deux vecteurs $(1,0,-1)$ et $(-1,1,0)$ sont libres car $\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\beta \in \mathbb{R} \quad \alpha(1,0,-1)+\beta(-1,1,0) = (0,0,0$
  $\Longrightarrow (\alpha-\beta,\beta,-\alpha) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$
  La famille formée deux vecteurs $(1,0,-1)$ et $(-1,1,0)$ est libre et devient alors une base de $Im(\phi)$.
- Comme l'on sait que $Im(\phi)$ est un plan vectoriel alors $Im(\phi))$ a pour base $(1,0,-1)$ et $(-1,1,0)$
- Comme $Im(\phi) \neq \vec{F} = \mathbb{R}^3$ alors ϕ n'est pas surjective.

9.4 Exercice

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes d'une variable réelle et de degré inférieur ou égal à 2.

1. Donner sans justification la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit l'application ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui
   à tout polynôme P associe le polynôme $Q = \phi(P)$ défini par
   $Q(X) = P(X+1) - P(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}$
   (a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
   (b) Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Déterminer $ker(\phi)$ puis $Im(\phi)$

9.4.1 Corrigé

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes d'une variable réelle et de degré inférieur ou égal à 2.

1. $\mathbb{R}_2[X]$ est formé des :
   - des polynômes de degré 2 : les trinômes $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
   - des polynômes de degré 1 : les binômes $x \mapsto bx + c$ où $b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$
   - des polynômes de degré 0 : les constantes non nulles $x \mapsto c$ où $c \in \mathbb{R}^*$
   - du seul polynôme de degré ∞ : le polynôme nul $\Theta : x \mapsto 0$

   Par conséquent, $\mathbb{R}_2[X] = \{x \mapsto ax^2 + bx + c / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$.
   La base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc $\mathcal{B} = (UN, Id, Carre)$ où $UN : x \mapsto 1$,$Id : x \mapsto x$ et $Carre : x \mapsto x^2$.
2. Soit l'application ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui
   à tout polynôme P associe le polynôme $Q = \phi(P)$ défini par
   $Q(X) = P(X+1) - P(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}$
   (a) ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ car
   $\forall\alpha_1 \in \mathbb{R} \quad \forall\alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall P_1 \in \mathbb{R}_2[X] \quad \forall P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$

on a $\phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \phi(P_1) + \alpha_2 \phi(P_2)$.
En effet,

- $\phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = Q$ tel que
  $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(X) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)(X+1) - (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)(X)$
- $\alpha_1 \phi(P_1) + \alpha_2 \phi(P_2) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$ tel que
  $\forall X \in \mathbb{R} \quad (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2)(X) = \alpha_1 Q_1(X) + \alpha_2 Q_2)(X)$
  $= \alpha_1(P_1(X+1) - P_1(X)) + \alpha_2(P_2(X+1) - P_2(X))$
  $= \alpha_1 P_1(X+1) - \alpha_1 P_1(X)) + \alpha_2 P_2(X+1) - \alpha_2 P_2(X)) = R(X)$
- On a bien $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(X) = R(X)$ donc $Q = R$ d'où $\phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \phi(P_1) + \alpha_2 \phi(P_2)$. **CQFD**.

(b) Pour déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit de déterminer les images $\phi(UN), \phi(Id), \phi(Carre)$

- $\phi(UN) = Q_1$ tel que $\forall X \in \mathbb{R} \quad Q_1(X) = UN(X+1) - UN(X) = 1 - 1 = 0$
  donc $\phi(UN) = \Theta$
- $\phi(Id) = Q_2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R} \quad Q_2(X) = Id(X+1) - Id(X) = X + 1 - X = 1$
  donc $\phi(Id) = UN$
- $\phi(UN) = Q_3$ tel que $\forall X \in \mathbb{R} \quad Q_3(X) = Carre(X+1) - Carre(X)$
  $= X^2 + 2X + 1 - X^2 = 2X + 1$ donc $\phi(Carre) = 2Id + UN$

Par conséquent, la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) i. Déterminons le noyau $ker(\phi)$.
Soit P tel que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Alors
$P \in ker(\phi) \iff \phi(P) = \Theta \iff \forall X \in \mathbb{R} \quad P(X+1) - P(X) = 0$
$\iff \forall X \in \mathbb{R} \quad a(X+1)^2 + b(X+1) + c - (aX^2 + bX + c) = 0$
$\iff \forall X \in \mathbb{R} \quad a(X^2 + 2X + 1) + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c) = 0$
$\iff \forall X \in \mathbb{R} \quad 2aX + a + b = 0 \iff 2a = 0$ et $a + b = 0$
$\iff a = 0$ et $b = 0$ et $c \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, $Ker(\phi) = \{X \mapsto c / c \in \mathbb{R}\}$.
$Ker(\phi) = \overrightarrow{D}_{UN}$ la droite vectorielle de base (UN) car :

- (UN) est une famille génératrice de $Ker(\phi)$ puisque $\forall c \in \mathbb{R} \quad c = c.1$
- (UN) est libre car $UN \neq \Theta$

ii. $dim(ker(Phi)) = 1$. Or d'après le théorème du rang,
$dim(\mathbb{R}_2[X]) = dim(ker(\phi)) + dim(Im(\phi))$ donc $3 = 1 + dim(Im(\phi))$
donc $dim(Im(Phi)) = 2$

iii.
- $Im(\phi)$ est donc le plan vectoriel engendré par la famille
  $\mathcal{F} = (\phi(UN), \phi(Id), \phi(Carre)) = (\Theta, UN, 2Id + UN) = (UN, 2Id + UN)$.
- Cette famille $\mathcal{F}$ est libre car c'est une famille génératrice de 2 vecteurs dans un sous-espace vectoriel de dimension 2.
- Donc $\mathcal{F}$ est une base de $Im(\phi)$

Par conséquent $Im(\phi) = \overrightarrow{P}_{(UN, 2Id+UN)}$

9.5 Exercice

Soit $n \geq 1$. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & f(P) = P + (1-X)P' \end{array}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E
2. Déterminer $ker(f)$ puis $Im(f)$

9.5.1 Corrigé

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. soient $(P, Q) \in E^2$ alors
$f(\alpha P + Q) = \alpha P + Q + (1-X)[\alpha P + Q]' = \alpha P + Q + (1-X)[\alpha P' + Q']$
$= \alpha(P + (1-X)P') + Q + (1-X)Q' = \alpha f(P) + f(Q)$
donc f est un endomorphisme de E

2. (a) $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in ker(f) \iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + (1-X)(\sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} = 0$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} k a_k X^k + n a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} (1-k) a_k X^k + \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + (1-n) a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} (1-k) a_k X^k + \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j + (1-n) a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} (1-k) a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k + (1-n) a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} [(1-k) a_k + (k+1) a_{k+1}] X^k + (1-n) a_n X^n = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-k)a_k + (k+1)a_{k+1} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n-1 \\ (1-n)a_n = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \\ -2a_3 + 4a_4 = 0 \\ \vdots \\ -n a_{n-1} + n a_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a_k = 0 \text{ pour tout } k \geq 2 \\ a_0 + a_1 = 0 \end{array} \right.$$

Donc $ker(f) = Vect(1-X)$ qui est une droite vectorielle.

(b) D'après la formule du rang, on sait que $dim(ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E)$ donc $dim(Im(f)) = n-1$.
$Im(f)$ est engendré par $(f(1), f(X), f(X^2), \cdots, f(X^n))$. Or $f(1) = f(X)$ donc $Im(f)$ est engendré par les $f(X^k) = kxk - 1 + (1-k)X^k$ qui sont linéairement indépendantes donc forment une base de $Im(f)$.

9.6 Exercice Essec 08 ecs

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{P}_r$ le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à r.
Etant donné $Q \in \mathcal{P}$, on se propose de déterminer toutes les fonctions polynomiales P vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x+1) - P(x) = Q(x)$$

A cet effet, on introduit l'application Δ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Delta(x) = P(x+1) - P(x)$$

1. (a) Démontrer que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$
   (b) Soit $P \in \mathcal{P}$ de degré $r > 0$, calculer le degré de la fonction polynômiale $\Delta(P)$.
   (c) Démontrer que $ker(\Delta)$ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.
2. On considère pour $r \in \mathbb{N}^*$ l'application

$$\Delta_r : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_r & \longrightarrow & \mathcal{P}_r \\ P & \longmapsto & \Delta(P) \end{array}$$

   (a) Justifier la définition de Δ_r et montrer qu'elle est linéaire
   (b) Quel est le noyau de Δ_r ?
   (c) Montrer alors que $Im(\Delta_r) = \mathcal{P}_{r-1}$
   (d) En déduire que l'application Δ est surjective

9.6.1 Corrigé

9.7 Exercice

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2.

1. Donner sans justification la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe le polynôme $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = PM$

   (a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (c) Déterminer $ker(\phi)$ puis $Im(\phi)$

9.7.1 Corrigé

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2.

1. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 et la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est
   $\mathcal{B} = (E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$
2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe la matrice $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = PM$

   (a) ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car
   $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   on a $\phi(\alpha M + \beta N) = \alpha\phi(M) + \beta\phi(N)$.
   En effet,
   $\phi(\alpha M + \beta N) = P(\alpha M + \beta N) = P(\alpha M) + P(\beta N) = \alpha(PM) + \beta(PN)$
   $= \alpha\phi(M) + \beta\phi(N)$

   (b) Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   - $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$
   - $\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$
   - $\phi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$
   - $\phi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

   Or $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,1}$

   et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,2}$

   Donc la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c)

- $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \in ker(\phi) \iff \phi(M) = O \iff PM = O$
  $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  $\iff a + c = 0$ et $b + d = 0 \iff a = -c$ et $b = -d$
  Donc $ker(\phi) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$
- $ker(\phi)$ est donc le sous espace vectoriel engendré par la famille $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$ qui est une base car elle est libre.
  En effet, $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$
  $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ Donc $ker(\phi)$ est le plan vectoriel $\overrightarrow{P}_{(C,D)}$ de base (C, D) où
  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- D'après le théorème du rang,$dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = dim(ker(\phi)) + dim(Im(\phi))$
  donc $4 = 2 + dim(Im(\phi))$ donc $dim(Im(Phi)) = 2$.
- Par conséquent, $Im(\phi)$ est le plan vectoriel engendré par la famille
  $(\phi(E_{1,1}), \phi(E_{1,2}), \phi(E_{2,1}), \phi(E_{2,2})) = (A, B, A, B) = (A, B)$
  Cette famille génératrice de 2 éléments dans un sous-espace vectoriel de dimension 2 est donc libre et est donc une base de ce sous-espace vectoriel.
- $Im(\phi)$ est le plan vectoriel $\overrightarrow{P}_{(A,B)}$ de base $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$

9.8 Exercice 3

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2. Soient A une matrice fixée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe le polynôme $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = MA - AM$

1. (a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $ker(\phi)$.
   (c) Démontrer que $A \in ker(\phi)$ et que $I \in ker(\phi)$.
   (d) Démontrer que si $B \in ker(\phi)$ et si $C \in ker(\phi)$ alors $BC \in ker(\phi)$
2. On suppose dorénavant que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
   (a) Calculer $\phi(M)$ et déterminer c et d en fonction de a et de b pour que $\phi(M) = 0$
   (b) Montrer que $ker(\phi)$ est l'ensemble des matrices de la forme $aI + bA$
   (c) Déterminer une base de $ker(\phi)$ et préciser la dimension de $ker(\phi)$
   (d) Si $K \in ker(\phi)$ on pose $K^0 = I$ et $\forall n \geq 1 \quad K^n = K^{n-1} \times K$.
   Démontrer que $K^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$
   puis déterminer K^n par récurrence.
   (e) Déterminer les matrices K telles que $K^2 = I$

9.8.1 Corrigé

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2. Soient A une matrice fixée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe la matrice $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = MA - AM$

1. (a) ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car
   $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   on a $\phi(\alpha M + \beta N) = \alpha\phi(M) + \beta\phi(N)$.
   En effet,
   $\phi(\alpha M + \beta N) = (\alpha M + \beta N)A - A(\alpha M + \beta N)$
   $= (\alpha M)A + (\beta N)A - A(\alpha AM) - A(\beta N)$
   $= \alpha(MA) + \beta(NA) - \alpha(AM) - \beta(AN) = \alpha(MA - AM) + \beta(NA - AN)$
   $= \alpha\phi(M) + \beta\phi(N)$
   (b) $M \in ker(\phi) \iff \phi(M) = O \iff MA - AM = O \iff MA = AM$
   Donc $ker(\phi)$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
   (c) $A \in ker(\phi)$ car $AA = AA$ et $I \in ker(\phi)$ car $AI = IA$ puisque $AI = A$ et $IA = A$.
   (d) Si $B \in ker(\phi)$ et si $C \in ker(\phi)$ alors $BA = AB$ et $CA = AC$ donc $(BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = (AB)C = A(BC)$ donc $BC \in ker(\phi)$
2. On suppose dorénavant que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(a) i. $\phi(M) = MA - AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a+b-d \\ -c & c \end{pmatrix}$

ii. $\phi(M) = O \iff \begin{pmatrix} -c & a+b-d \\ -c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff c = 0$ et $a+b = d$

(b) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in ker(\phi) \iff \phi(M) = O \iff c = 0$ et $a+b = d$
$\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI + bA$ Par conséquent, $ker(\phi)$ est l'ensemble des matrices de la forme $aI + bA$

(c) i. $Ker(\phi)$ est donc le sous espace vectoriel engendré par la famille (I, A)

ii. Cette famille est-elle libre ? Oui car :
$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow \alpha = 0$ et $\beta = 0$

iii. Par conséquent $ker(\phi)$ a pour base (I, A).
C'est donc le plan vectoriel $\overrightarrow{P}_{(I,A)}$ de base (I, A). Sa dimension est 2

(d) Si $K \in ker(\phi)$ on pose $K^0 = I$ et $\forall n \geq 1 \quad K^n = K^{n-1} \times K$.

i. Comme $K \in ker(\phi)$ alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad K = aI + bA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$
donc $K^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+ba+b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$

ii. Démontrons par récurrence que $K^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$

- étape 1 : initialisation en $n = 0$.
  On a bien $\begin{pmatrix} a^0 & (a+b)^0 - a^0 \\ 0 & (a+b)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et $K^0 = I$
  donc $K^0 = \begin{pmatrix} a^0 & (a+b)^0 - a^0 \\ 0 & (a+b)^0 \end{pmatrix}$ par conséquent la propriété est vraie au rang $n = 0$
- étape 2 : hérédité. Soit un certain $n \in \mathbb{N}$
  Supposons que $K^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$
  alors $K^{n+1} = K^n \times K = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n a & a^n b + [(a+b)^n - a^n](a+b) \\ 0 & (a+b)^n(a+b) \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} a^{n+1} & (a+b)^{n+1} - a^{n+1} \\ 0 & (a+b)^{n+1} \end{pmatrix}$
- Conclusion : cette propriété étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel n. CQFD.

(e) $K^2 = I \iff \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ (a+b)^2 - a^2 = 0 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ a+b = 1 \text{ ou } a+b = -1 \end{cases}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ 1 + b = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ 1 + b = -1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ -1 + b = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ -1 + b = -1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Les matrices K solutions de $K^2 = I$ sont donc :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } K = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.9 Même représentation matricielle dans deux bases différentes

Soit P un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit f un endomorphisme de P telle que matrice $M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit un vecteur non nul $u = ae_1 + be_2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Peut-on trouver un vecteur $v = ce_1 + de_2$ tel que $\mathcal{B}' = (u, v)$ soit une base de P et que $M(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$?

9.9.1 Corrigé

(u, v) est une base de P et $M(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\iff det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0$ et $\begin{cases} f(u) = -u + 2v \\ f(v) = u + 4v \end{cases}$

$\iff \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ et $\begin{cases} -a + b = -a + 2c \\ 2a + 4b = -b + 2d \\ -c + d = a + 4c \\ 2c + 4d = b + 4d \end{cases}$

$\iff ad - bc \neq 0$ et $\begin{cases} c = \dfrac{b}{2} \\ d = a + \dfrac{5}{2}b \end{cases}$

$\iff v \begin{pmatrix} \dfrac{b}{2} \\ a + \dfrac{5}{2}b \end{pmatrix}$

9.10 Endomorphisme nilpotent - Paris C 77

Soit E un espace vectoriel réel. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = e_2 + e_3$; $f(e_2) = -e_1 + e_3$; $f(e_3) = \dfrac{1}{2}(e_2 + e_3)$

1. Déterminer $ker(f)$ puis déterminer $Im(f)$.
   On précisera une base pour chacun de ces deux sous espaces vectoriels.
2. Déterminer $f(Im(f))$ et le comparer au noyau $ker(f)$.
3. Déterminer alors $f^3 = f \circ f \circ f$

9.10.1 Corrigé

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(f) \iff f(u) = 0$

   $$\iff \begin{cases} -y + \dfrac{1}{2}z = 0 \\ x + \dfrac{1}{2}z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}z \\ y = \dfrac{1}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff u = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Donc $ker(f)$ est la droite vectorielle de base $v \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $Im(f)$ est le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
   D'après le théorème du rang, comme $dim(E) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$ alors $3 = 1 + dim(Im(f))$ donc $dim(Im(f)) = 2$. Par conséquent, $Im(f)$ est un plan vectoriel.
   Or $f(e_3) = \dfrac{1}{2}f(e_1) - \dfrac{1}{2}f(e_2)$ donc la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est liée. Mais la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre. On en déduit que $Im(f)$ est le plan vectoriel de base $(f(e_1), f(e_2))$.
3. - $f(Im(f))$ est le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f(f(e_1)), f(f(e_2)))$
   - Or $(f(f(e_1)) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = -\dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{1}{2}e_2 + e_3 = v$
   - et $(f(f(e_2)) = f(-e_1 + e_3) = -f(e_1) + f(e_3) = \dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2 - e_3 = -v$

   Par conséquent, $f(Im(f))$ est la droite vectorielle de base v : c'est donc le noyau $ker(f)$.
4. Alors $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'application linéaire nulle Θ car
   $\forall u \in E \qquad f^3(u) = f(f(f(u))) = 0$ car $f(f(u)) \in f(Im(f))$ et $f(Im(f)) = ker(f)$.

9.11 Endomorphisme nilpotent

> Soit n un entier ≥ 2. Soit f un endomorphisme de E de dimension n tel que $f^n = \theta$ et $f^{n-1} \neq \theta$
> Démontrer que $rang(f) = n-1$ et $dim(ker(f)) = 1$

Comme $f^{n-1} \neq \theta$ alors $\exists x_0 \in E \quad f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
Soit $\mathcal{B} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\}$
Cette famille $\mathcal{B}$ est libre car si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ alors $f^{n-1}[\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x_0)] = f^{n-1}(0) = 0$ Donc $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^{i-1}(f^n(x_0$
or $f^n(x_0) = 0$ d'où $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0$ avec $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. On en déduit que $\lambda_0 = 0$.
En réitérant le même procédé $f^{n-2}[\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x_0)] = f^{n-1}(0) = 0$ on obtient $\lambda_1 = 0$.
On continue le même procédé on obtient ensuite $\lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_{n-1} = 0$
La famille $\mathcal{B}$ ayant n éléments et étant libre dans un espace vectoriel de dimension n est donc une base de E.
Alors la famille $\mathcal{B}' = \{f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)\}$ engendre $Im(f)$ mais comme $f^n(x_0) = 0$ donc cette famille $\mathcal{B}'$ a $n-1$ éléments.
En utilisant le procédé précédent, on démontre que cette famille $\mathcal{B}'$ est libre donc $dim(Im(f) = n-1$.
D'après le théorème du rang, on a donc $dim(Im(f)) = 1$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'' = \{f^{n-1}(x_0), \cdots, f^2(x_0), f(x_0), x_0, \}$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

9.12 Endomorphismes commutants

Soient u et v des endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.
Démontrer que $ker(u)$ et $Im(u)$ sont tous deux stables par v.

9.12.1 Corrigé

1. $v(ker(u)) \subset ker(u)$?
   Soit $y \in v(ker(u))$ donc $\exists x \in ker(u) \quad y = v(x)$. Alors $u(y) = u(v(x) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(0)$ car $x \in ker(u)$.
   Par conséquent, $u(y) = v(0) = 0$ donc $y \in ker(u)$. CQFD.
2. $v(Im(u)) \subset Im(u)$?
   Soit $z \in v(Im(u))$ donc $\exists y \in Im(u) \quad z = v(y)$. Comme $y \in Im(u) \quad \exists x \in E \quad y = u(x)$.
   Par conséquent, $z = v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ donc $z \in Im(u)$. CQFD.

9.13 Endomorphisme commutant avec tout autre endomorphisme

1. Soit u une homothétie vectorielle. Démontrer que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall x \in E \quad (x, u(x))$ est liée.
   Démontrer que u est une homothétie vectorielle.
3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.
   Démontrer que u est une homothétie vectorielle .

9.13.1 Corrigé

1. Soit u une homothétie vectorielle c'est-à-dire $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad u = \lambda \, id_E$.
   Alors $\forall x \in E \qquad (u \circ v)(x) = u(v(x)) = \lambda v(x) = v(\lambda x)$ car v est une application linéaire.
   Par conséquent, $\forall x \in E \qquad (u \circ v)(x) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$.
   On a donc démontré que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall x \in E \quad (x, u(x))$ est liée donc $\forall x \in E \quad \exists \lambda_x \in K \quad u(x) = \lambda_x x$.
   Soit un couple (x, y) d'éléments de E. Donc $u(x) = \lambda_x x$ et $u(y) = \lambda_y y$.
   - ou bien (x, y) est libre.
     Alors $u(x + y) = \lambda_{x+y} x + y$. Mais $u(x + y) = u(x) + u(y)$ car u est linéaire donc $\lambda_{x+y} x + y = \lambda_x x + \lambda_y y$.
     Par conséquent, $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$. Or la famille (x, y) est libre.
     Donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x) = 0$ et $(\lambda_{x+y} - \lambda_y) = 0$ d'où $\lambda_x = \lambda_y$
   - ou bien (x, y) est liée.
     - ou $x \neq 0$
       Alors $y = \mu x$ et $u(\mu x) = \lambda_{\mu x}$. or $u(\mu x) = \mu u(x)$ car u est linéaire
       donc $\lambda_{\mu x} x = \mu \lambda_x x$.
       On obtient $[\lambda_{\mu x} - \mu \lambda_x]x = 0$ avec $x \neq 0$ donc $\lambda_{\mu x} - \mu \lambda_x] = 0$ d'où $\lambda_{\mu x} = \mu \lambda_x$.
     - ou $x = 0$
       $u(x) = u(0) = 0 = \lambda 0$ pour n'importe quel λ
   - dans tous les cas $\exists \lambda \in K \quad \forall x \in E \quad u(x) = \lambda x$ donc u est une homothétie vectorielle.
3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.
   soit $x \in E$ et soit p un projecteur sur $Vect(x)$.

Alors $p(u(x)) = (p \circ u)(x) = (u \circ p)(x) = u(p(x)) = u(x)$ car $p(x) = x$ puisque $x \in Vect(x)$.
Par conséquent, $u(x) \in Vect(x)$ donc la famille $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in E$ donc u est une homothétie vectorielle.

9.14 Rang d'une somme d'endomorphismes

> Soient u et v des endomorphismes de E de dimension finie.
> Démontrer que $| rang(u) - rang(v) | \leq rang(u+v) \leq rang(u) + rang(v)$.

9.14.1 Corrigé

- $Im(u+v) = (u+v) < E > \subset u < E > +v < E >= Im(u) + Im(v)$
  Par conséquent, $rang(u+v) = dim(Im(u+v)) \leq dim(Im(u) + Im(v))$.
  Or $dim(Im(u) + Im(v)) \leq dim(Im(u)) + dim(Im(v))$.
  Donc $rang(u+v) \leq rang(u) + rang(v) \qquad (*)$ CQFD.
- En utilisant cette propriété $(*)$ nous avons $rang(u+v-v) \leq rang(u+v) + rang(-v)$ donc $rang(u) \leq rang(u+v) + rang(v)$
  d'où $rang(u) - rang(v) \leq rang(u+v) \qquad (**)$.
  On réutilise cette propriété $(*)$ de la façon suivante :
  $rang(v+u-u) \leq rang(v+u) + rang(-u)$ d'où $rang(v) \leq rang(u+v) + rang(u)$. On en déduit que $rang(v) - rang(u) \leq rang(u+v) \qquad (***)$
- D'après $(**)$ et $(***)$ on obtient donc $| rang(u) - rang(v) | \leq rang(u+v)$ CQFD.

9.15 Rang d'une matrice

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

9.15.1 Corrigé : Méthode 1

1. La matrice A est une matrice de format $(4,3)$ donc $rang(A) \leq min(4,3) = 3$
2. Lorsque l'on examine les 3 vecteurs colonnes, on constate que $\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3}$ donc cette famille de 3 vecteurs est liée donc $rang(A) < 3$
3. On cherche alors s'il y a un déterminant d'ordre 2 qui est non nul.
   Un des déterminants d'ordre 2 est $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ donc la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est libre donc $rang(A) = 2$

9.15.2 Corrigé : Méthode 2

1. La matrice A est une matrice de format $(4,3)$ donc $rang(A) \leq min(4,3) = 3$
2. On calcule tous les déterminants d'ordre 3 possibles :
   - $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$

   Ils sont tous nuls donc $rang(A) < 3$
3. On cherche alors s'il y a un déterminant d'ordre 2 qui est non nul.
   Un des déterminants d'ordre 2 est $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ donc $rang(A) = 2$

9.16 Rang d'une matrice

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$

9.16.1 Corrigé

1. A est une matrice de format $(3,3)$ donc $rang(A) \leq min(3,3) = 3$.
2. $det(A) = \begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix} - r \begin{vmatrix} -r & p \\ q & 0 \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} -r & 0 \\ q & -p \end{vmatrix} = rpq - qrp = 0$ donc $rang(A) \neq 3$.
3. On a donc $rang(A) \leq 2$. Il reste à trouver au moins un déterminant d'ordre 2 non nul pour affirmer que $rang(A) = 2$.
   - $\begin{vmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{vmatrix} = -r^2$
   - $\begin{vmatrix} 0 & -q \\ -r & p \end{vmatrix} = rq$
   - $\begin{vmatrix} r & -q \\ 0 & p \end{vmatrix} = rp$
   - $\begin{vmatrix} 0 & r \\ q & -p \end{vmatrix} = -rq$
   - $\begin{vmatrix} 0 & -q \\ q & 0 \end{vmatrix} = q^2$
   - $\begin{vmatrix} r & -q \\ -p & 0 \end{vmatrix} = -pq$
   - $\begin{vmatrix} -r & 0 \\ q & -p \end{vmatrix} = rp$
   - $\begin{vmatrix} -r & p \\ q & 0 \end{vmatrix} = -qp$
   - $\begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix} = p^2$
   - ou bien un des 3 nombres p, q, r est non nul alors au moins un des déterminats précédents d'ordre 2 est non nul donc $rang(A) = 2$.
   - ou bien $p = q = r = 0$ alors $A = O$ donc $rang(A) = 0$

9.17 Rang d'une matrice

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

9.17.1 Corrigé - méthode 1

1. A est une matrice de format $(4,5)$ donc $rang(A) \leq min(4,5) = 4$.
2. Si l'on trouve au moins un déterminant d'ordre 4 extrait de cette matrice qui est non nul alors $rang(A) = 4$.
   - $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & -2 & & & & \\ 0 & 4 & 2 & 0\,2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 & & & & \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ donc $rang(A) = 4$.
   -

9.17.2 Corrigé - méthode 2

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, en remplaçant $v_2 \leftarrow v_2 - 7v_1; v_3 \leftarrow v_3 - 5v_1; v_4 \leftarrow v_4 - 3v_1; v_5 \leftarrow v_5 + 2v_1$ on obtient que A a même rang que la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -16 & -6 & -6 & 5 \\ 3 & -22 & -8 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

Comme A' a deux colonnes identiques alors A' a même rang que $A'' = (v_1, v_2, v_3, v_5)$ qui a donc même rang que $(v_1, \frac{1}{2}v_2, \frac{1}{2}v_3, v_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & -3 & 5 \\ 3 & -11 & -4 & 9 \end{pmatrix}$. qu'on réarrange en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -8 & 5 \\ 3 & -4 & -11 & 9 \end{pmatrix}$.

en faisant $v_3 \leftarrow v_3 - 2v_2$ cette matrice a même rang que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Or $det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times_2 3 = -23 \neq 0$ donc $rang(A) = 4$

9.18

> Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie.
> Soit f une application linéaire surjective de E sur F.
> Démontrer qu'il existe une application linéaire g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$

9.18.1 Corrigé

Soit $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de F.
Tout $y \in F$ s'écrit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$.
Comme f est surjective, chaque f_i a au moins un antécédent e_i dans E.

1. Posons $g : F \mapsto E$ telle que $\forall y \in F \quad g(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.
2. g est linéaire car $\forall y \in E \quad \forall z \in E \quad \forall \alpha \in K \quad g(y + \alpha z) = g(y) + \alpha g(z)$
   En effet, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$; $z = \sum_{i=1}^{n} z_i f_i$; $y + \alpha z = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} z_i f_i = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i + \alpha z_i f_i = \sum_{i=1}^{n} [y_i + \alpha z_i] f_i$
   Alors $g(y + \alpha z) = g(\sum_{i=1}^{n} [y_i + \alpha z_i] f_i = \sum_{i=1}^{n} [y_i + \alpha z_i] e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha z_i] e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} z_i] e_i$
   $= g(y) + \alpha g(z)$
3. $\forall y \in F \quad (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(g(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i)) = f(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = y$
   donc $f \circ g = Id_F$. CQFD.