Rallye Mathématiques 2003 Lycées

Irem Antilles-Guyane

12 avril 2021

1 Enoncés - Epreuve de sélection

1.1 "L'âge d'Emile en l'an 2003"- 4 points

Au 1$^{\text{er}}$ janvier 1991, Geoffroy avait deux fois l'âge d'Emile.
Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2001, Geoffroy avait 20 ans de plus qu'Emile.
Quel âge a eu Emile au 1$^{\text{er}}$ janvier 2003 ?

1.1.1 Corrigé

- Notons e l'âge au 1$^{\text{er}}$ janvier 1991 d'Emile et g l'âge au 1$^{\text{er}}$ janvier 1991 de Geoffroy.
- On a alors au 1$^{\text{er}}$ janvier 1991 l'équation suivante $g = 2e$.
- Au au 1$^{\text{er}}$ janvier 2001 c'est-à-dire 10 ans plus tard
  Emile aura pour âge $e + 10$ et Geoffroy $g + 10$
- On sait qu'alors $g + 10 = (e + 10) + 20$
  Nous devons alors résoudre le système :
  $$\left\{\begin{array}{l} g = 2e \\ g + 10 = e + 30 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} g = 2e \\ g = e + 20 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e + 20 = 2e \\ g = e + 20 \end{array}\right. \iff \iff \left\{\begin{array}{l} e = 20 \\ g = e + 20 \end{array}\right.$$
  $$\iff \left\{\begin{array}{l} e = 20 \\ g = 40 \end{array}\right.$$

On a donc

Age en	1991	2001	2003
Emile	20	30	32
Geofroy	40	50	52

Emile aura 32 ans en 2003.

1.2 "Avant l'heure, ce n'est pas l'heure "- 4 points

Mr et Mme MOLOKOY décident d'aller déjeuner dans un restaurant à 48 km de chez eux. Mr MOLOKOY part à vélo à 8 h et roule à une vitesse moyenne de 18 km/h.
Sa femme le rejoint en voiture à une vitesse moyenne de 72 km/h.
A quelle heure doit-elle partir pour arriver en même temps que son mari ?

1.2.1 Corrigé

- Mr MOLOKOY parcourt 18 km en $60'$ donc parcourt 1 km en $\frac{60}{18} = \frac{10'}{3}$. Il va alors parcourir les 48 km en $\frac{10}{3} \times 48 = 160' = 2\ h\ 40'$
- S'il est parti à 8 h il arrive donc à destination à 10 h 40
- Mme MOLOKOY roule à la vitesse de 72 km/h donc elle peut parcourir 72 km en $60'$ d'où 1 km en $\frac{60}{72} = \frac{5'}{6}$ donc elle parcourt les 48 km en $\frac{5}{6} \times 48 = 40'$
- Comme son mari arrive à 10 h 40 il lui suffit de partir à 10 h pour arriver en même temps que lui à destination.

1.3 "Lotomath "- 5 points

Compléter la grille ci-dessous sachant que chaque case vide doit être marquée du nombre qui est la moyenne arithmétique des quatre cases qui lui sont adjacentes.

	22	10	
26			24
16			10
	24	6	

Deux cases sont dites adjacentes lorsqu'elles ont un côté en commun.
Rappel : La moyenne arithmétique de 4 nombres est la somme de ces 4 nombres divisée par 4.

1.3.1 Corrigé

	22	10	
26	20	14	24
16	18	12	10
	24	6	

1.4 "Jetons les jetons "- 5 points

On dispose de 9 jetons, marqués des chiffres $1, 2, 3$ et 4. Ils sont en double sauf l'un d'entre eux qui est en triple exemplaire.
On dit que deux jetons sont voisins si les cases qui les contiennent ont un côté en commun.
On doit ranger les 9 jetons dans les 9 cases ci-dessous de façon que :

- Chaque jeton marqué du chiffre 4 est voisin d'au moins un jeton marqué 2 et un marqué 3.
- Chaque jeton marqué du chiffre 3 est voisin d'au moins un jeton marqué 1 et un marqué 2.
- Chaque jeton marqué du chiffre 2 est voisin d'au moins un jeton marqué 1 .

1. Quel jeton occupe la place centrale ?
2. Quel jeton est en triple exemplaire ?

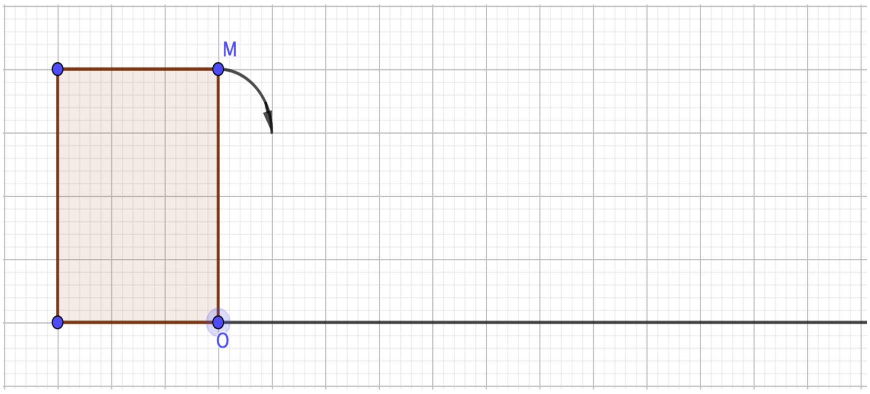
1.4.1 Corrigé

4	2	4
3	1	3
2	1	2

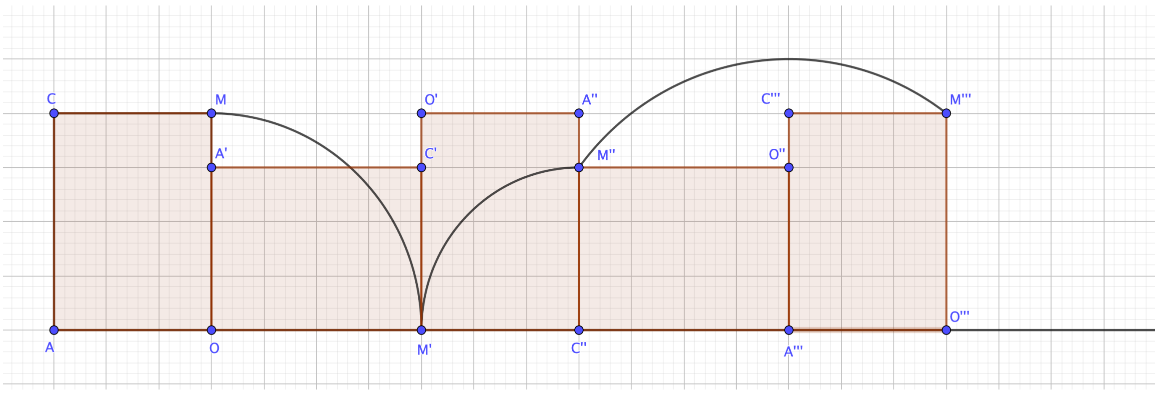
1. Le jeton 1 occupe la place centrale.
2. Le jeton 2 est en triple exemplaire.

1.5 "Caisse centrale "- 4 points

> On marque l'un des sommets d'une caisse (le point M) de hauteur 4 m et de largeur 3 m.
> On bascule la caisse en prenant soin que le point O ne dérape pas au cours du basculement.
> On continue de proche en proche jusqu'à ce que la caisse reprenne sa position initiale.
> **Quelle la longueur exacte de la trajectoire du point M ?**



1.5.1 Corrigé

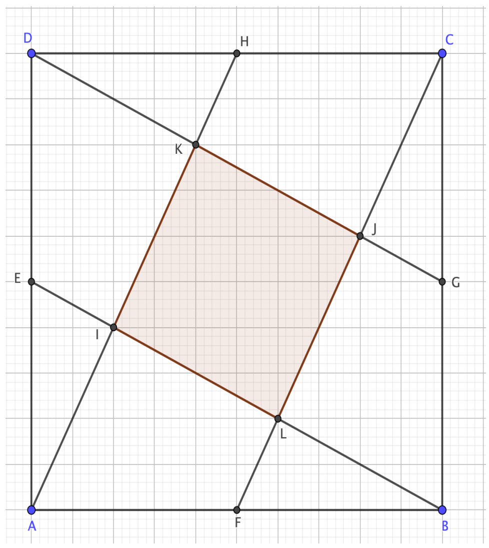


- La rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme M en M',C en C', A en A' :
  L'arc $\widehat{MM'}$ mesure $\frac{1}{4}\left[2\pi(4)\right] = 2\pi$ le rayon $OM = 4$.
- La rotation de centre M' et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme C' en C'',A' en A''', O en O'' : :
  L'arc $\widehat{M'M''}$ mesure $\frac{1}{4}\left[2\pi(3)\right] = \frac{3\pi}{2}$ le rayon $CM' = 3$.
- La rotation de centre A'' et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme M'' en M''',O' en O'', C'' en C''' :
  L'arc $\widehat{M''M'''}$ mesure $\frac{1}{4}\left[2\pi(5)\right] = \frac{5\pi}{2}$ car le rayon $A''M'' = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Par conséquent, la longueur de la trajectoire décrite par M est $2\pi + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 2\pi + 4\pi = 6\pi$

1.6 "Le puzzle "- 5 points

Le puzzle ci-dessous a été construit dans un carré de 10 cm de côté en utilisant les milieux des côtés.
Quelle est la longueur exacte d'un côté de la partie hachurée ?



1.6.1 Corrigé

1. Pour des raisons de construction, on a :
   - $AF = FB = EG = GC = CH = HD = DE = EA = 5$
   - $IL = LD = LJ = JC = JK = KD = KL = AL = y$
   - $FL = GJ = HK = EI = x$
2. En utilisant le théorème de Pythagore, on a $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
3. D'après le théorème de Thalès, dans le triangle DGC et les parallèles (KH) et (JC) on a donc :
   $\dfrac{KH}{JG} = \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ d'où $= \dfrac{1}{2}$
4. Or $KH = y$ et $JG = x$ donc $y = \dfrac{1}{2}x$
5. Or $5\sqrt{5} = AH = AI + IK + KH = x + x + \dfrac{1}{2}x = \dfrac{5}{2}$ donc $x = 2\sqrt{5}$

La longueur exacte d'un côté de la partie hachurée est donc $x = 2\sqrt{5}$