Résolution de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Christian CYRILLE

12 décembre 2025

Jérôme CARDAN(1501-1576)

1 Préliminaires

1.1 Recherche de 2 nombres connaissant leur somme et leur produit

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = S \\ p_1 p_2 = P \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = S \\ p_1 p_2 = P \\ (X - p_1)(X - p_2) = 0 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = S \\ p_1 p_2 = P \\ X^2 - (p_1 + p_2)X + p_1 p_2 = 0 \end{cases}$$

$\iff X^2 - SX + P = 0$

1.2 Racines n-ièmes complexes

1.2.1 Racines n-ièmes complexes d'un nombre complexe non nul

Soit un nombre complexe $Z \neq 0$.
Soit n un entier naturel différent de 0 et de 1. Soit l'équation $z^n = Z$ d'inconnue complexe z.

1. Comme $Z \neq 0$ alors $z \neq 0$. On résoud donc cette équation dans $\mathbb{C}^*$. Alors comme un nombre complexe non nul a une écriture trigonométrique, on pose $Z = \rho e^{i\theta}$ et $z = re^{i\alpha}$
Donc $z^n = Z \Longleftrightarrow (re^{i\alpha})^n = \rho e^{i\theta} \Longleftrightarrow r^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta}$
$$\begin{cases} r^n = \rho \\ \exists k \in \mathbb{Z} \; n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases}$$
$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \; \alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$
Donc $S_n = \{ \sqrt[n]{\rho} \; e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \mathbb{Z}\}$
2. Lorsque k décrit $\mathbb{Z}$ alors **les mesures d'angle** $\dfrac{2k\pi}{n}$ **sont représentées géométriquement sur le cercle trigonométrique par** n **points distincts sommets d'un polygone inscrit régulier correspondants aux** n **valeurs suivantes** $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$
$S_n = \{ \sqrt[n]{\rho} \; e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in [|0 \; ; \; n-1|]\}$
Donc le cardinal de l'ensemble S_n des solutions est n.

Ces solutions sont appelées les **racines-nièmes complexes de** Z.
*Onappelle***racine-nième de l'unité une racine-nième complexes de**1.

1.2.2 Racines n-ièmes de l'unité

On note U_n l'ensemble des racines nièmes complexes de l'unité. ici $Z = 1 = 1e^{i0}$

1. $U_n = \{ \sqrt[n]{1} \; e^{i\left(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in [|0 \; ; \; n-1|]\} = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [|0; n-1|]\}$.
2. On pose $\omega = cos(\dfrac{2\pi}{n}) + i \; sin(\dfrac{2\pi}{n}) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
   (a) les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les ω^k où $k \in [|0; n-1|]$
   (b) Comme $\omega \neq 1$ alors la somme des racines n-ièmes complexes de l'unité est :
   $\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \omega^0 \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$
   puisque $\omega^n = 1$

1.2.3 Racines cubiques de l'unité

1. $U_3 = \{e^{i\frac{2k\pi}{3}} / k \in [|0 \; ; \; 2|]\} = \{e^{i\frac{0\pi}{3}} ; e^{i\frac{2\pi}{3}} ; e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ En posant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ alors $U_3 = \{1; j; j^2\}$
2. $z^3 = 27 \Longleftrightarrow z^3 = 3^3 \Longleftrightarrow \dfrac{z^3}{3^3} = 1 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{z}{3}\right)^3 = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{z}{3} \in \{1 \; ; \; j \; ; \; j^2\}$
$\Longleftrightarrow z = 3$ ou $z = 3j$ ou $z = 3j^2$

3. On considère 3 points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.
   - ABC est un triangle équilatéral direct $\Longleftrightarrow$ la rotation vectorielle d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$
     $\Longleftrightarrow z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{\overrightarrow{AB}}) \Longleftrightarrow c - a = -j^2(b-a)$
     $\Longleftrightarrow c + a(-1-j^2) + bj^2 = 0 \Longleftrightarrow c + aj + bj^2 = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$
     $\Longleftrightarrow b + cj + aj^2 = 0$ en multipliant les 2 membres par j et en utilisant $j^3 = 1 \Longleftrightarrow a + bj + cj^2 = 0$ en multipliant les 2 membres par j et en utilisant $j^3 = 1$
   - ABC est un triangle équilatéral $\Longleftrightarrow$ la rotation vectorielle d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ ou la rotation vectorielle d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ transforme $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB}$
     $\Longleftrightarrow a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj) = 0 \Longleftrightarrow (a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = 0$
     $\Longleftrightarrow a^2 + ab(j + j^2) + ac(j + j^2) + b^2 + bc(j^2 + j) + c^2j^3 = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 0$

2 Résolution de l'équation $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ à coefficients complexes

2.1 Préliminaire

Soit le polynôme $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ où A, B, C, D sont des coefficients complexes avec $A \neq 0$.

1. $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \Longleftrightarrow A(x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}) = 0$
   $\Longleftrightarrow x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ où $b = \frac{B}{A}$, $c = \frac{C}{A}$ et $d = \frac{D}{A}$ sont des coefficients complexes.
2. On note $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.
   Alors $P(x+h) = (x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + bx^2 + 2bxh + bh^2 + cx + ch + d = x^3 + x^2(3h + b) + x(3h^2 + c + 2bh) + h^3 + bh^2 + ch + d$
   Il suffit de prendre $h = -\frac{b}{3}$ pour que $P(x+h) = x^3 + px + q$

On se limitera dorénavant aux équations du 3^{me} degré du type $x^3 + px + q = 0$ où $(p, q) \in \mathbb{C}^2$

2.2 Résolution de $x^3 + px + q = 0$ où $(p, q) \in \mathbb{C}^2$

1. - Le théorème de D'Alembert-Gauss permet d'affirmer l'existence de 3 solutions complexes x_1, x_2, x_3 pour l'équation $x^3 + px + q = 0$
   - (Formule de Viète) :
     x_1, x_2, x_3 sont les solutions de $x^3 + px + q = 0 \Longleftrightarrow x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
     $\Longleftrightarrow x^3 + px + q = x^3 + x^2(-x_3 - x_2 - x_1) + x(x_3x_2 + x_1x_2 + x_1x_3) -$

$x_1x_2x_3$

$\iff \boxed{\sum_{i=1}^{3} x_i = 0}$ et $\boxed{\sum_{1\leq i<j\leq 3} x_ix_j = p}$ et $\boxed{x_1x_2x_3 = -q}$

2. x_1, x_2, x_3 désignant toujours les solutions de $x^3 + px + q = 0$,
   (a) $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

   Or $\sum_{i=1}^{3} x_i = 0$ et $\sum_{1\leq i<j\leq 3} x_ix_j = p$ donc $= 0^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 2p$.

   Par conséquent, $\boxed{A = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = -2p}$

   (b) Comme x_1, x_2 et x_3 sont les solutions de l'équation $x^3 + px + q = 0$ alors $x_1^3 + px_1 + q = 0$ et $x_2^3 + px_2 + q = 0$ et $x_3^3 + px_3 + q = 0$ donc en sommant on obtient $0 = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + p\sum_{i=1}^{3} x_i + 3q$. Or $\sum_{i=1}^{3} x_i = 0$ donc

   $0 = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + p(0) + 3q$

   Par conséquent, $\boxed{B = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 = -3q}$

   (c) $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1x_3^2 + 3x_2x_1^2 + 3x_2x_3^2 + 3x_3x_1^2 + 3x_3x_2^2 + 6x_1x_2x_3$

   Donc $0 = -3q + 3\sum_{1\leq i<j\leq 3}^{3} x_i^2x_j - 6q$ Par conséquent $\boxed{C = \sum_{1\leq i<j\leq 3}^{3} x_i^2x_j = 3q}$.

3. (a) Il y aen tout 3! permutations des 3 lettres x, y, z. Voici donc les 6 bijections de x, y, z dans x, y, z :

   $\sigma_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}$; $\sigma_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$

   $\sigma_4 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$; $\sigma_5 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$; $\sigma_6 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$

   (b) Si σ est une telle bijection alors $f(x, y, z)$ un polynôme en x, y, z, on désigne par f_σ le polynôme suivant : $f_\sigma(x, y, z) = f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$.

   Posons $f(x, y, z) = (x + jy + j^2z)^3$ où $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ alors comme $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$

   i. $f_{\sigma_1}(x, y, z) = f(\sigma_1(x), \sigma_1(y), \sigma_1(z)) = f(x, y, z) = (x + jy + j^2z)^3 = P_1$

   ii. $f_{\sigma_2}(x, y, z) = f(\sigma_2(x), \sigma_2(y), \sigma_2(z)) = f(x, z, y) = (x+jz+j^2y)^3 = P_2$

   iii. $f_{\sigma_3}(x, y, z) = f(\sigma_3(x), \sigma_3(y), \sigma_3(z)) = f(z, y, x) = (z+jy+j^2x)^3 = j^3(z + jy + j^2x)^3 = (jz + j^2y + j^3x)^3 = (x + jz + j^2y) = P_2$

iv. $f_{\sigma_4}(x,y,z) = f(\sigma_4(x),\sigma_4(y),\sigma_4(z)) = f(y,x,z) = (y+jx+j^2z)^3 = j^3(y+jx+j^2z)^3 = (jy+j^2x+j^3z)^3 = (z+jy+j^2x)^3 =$

v. $f_{\sigma_5}(x,y,z) = f(\sigma_5(x),\sigma_5(y),\sigma_5(z)) = f(y,z,x) = (y+jz+j^2x)^3 = j^3(y+jz+j^2x)^3 = ()^3 == ()^3 =$

vi. $f_{\sigma_6}(x,y,z) = f(\sigma_6(x),\sigma_6(y),\sigma_6(z)) = f(z,x,y) = (z+jx+j^2y)^3 = j^3(z+jx+j^2y)^3 = ()^3 = ()^3 =$

l'ensemble des polynômes f_σ est réduit à deux éléments P_1 et P_2 avec $P_1 = (x+jy+j^2z)^3$ et $P_2 = (x+jz+j^2y)^3$

4. On suppose maintenant que x, y, z sont les solutions complexes de $x^3 + px + q = 0$ où $(p,q) \in \mathbb{C}^2$
   (a) Calculer $P_1 + P_2$ puis P_1P_2 en fonction de p et de q en utilisant le 1) et le 2)
   (b) En déduire P_1 et P_2
   (c) En posant $\alpha = x + jy + j^2z$ et $\beta = x + j^2y + jz$ exprimer x, y, z en fonction de α et de β
   (d) α et β étant donc les racines cubiques de P_1 et de P_2, quelle relation doit les lier pour que les $x; y, z$ obtenus précédemment soient effectivement les solutions de $x^3 + px + q = 0$ (Utiliser le 1°)
   (e) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $x^3 + px + q = 0$
   (f) Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :$x^3 + 3x + 2 = 0$
5. Si $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ donner en étudiant les variations de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + px + q$ les conditions nécessaires et suffisantes pour que les 3 racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ soient réelles.

3 Résolution de l'équation $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ à coefficients réels

3.1 Préliminaire

Soit le polynôme $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ où A, B, C, D sont des coefficients réels avec $A \neq 0$.

1. Montrer que résoudre $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0 \Longleftrightarrow x^3+bx^2+cx+d=0$ où b, c, d sont des coefficients réels.
2. On note $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Montrer qu'il existe un nombre réel h tel que $P(x+h)$ a la forme $x^3 + px + q$

On se limitera dorénavant aux équations du 3^{me} degré du type $x^3 + px + q = 0$ où $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

3.2 Résolution de $(E) : x^3 + px + q = 0$ où $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

1. (a) supposons u^3 et v^3 sont des racines distinctes de

$$(F) : x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

donc $\boxed{u^3 + v^3 = -q}$ et $u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$ donc $\boxed{uv = -\dfrac{p}{3}}$ donc
$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q$
$= -q+3uv(u+v)+q = 3(-\dfrac{p}{3})(u+v)+pu+pv = -pu+-pv+u+pv = 0$
Par conséquent $u+v$ est racine de l'équation (E)

(b) Comme $u+v$ est racine de (E) alors
$x^3 + px + q = (x - (u+v))[x^2 + \beta x + \gamma]$
donc $x^3+px+q = x^3+x^2[-(u+v)+\beta]+x[\gamma-(u+v)\beta]-\gamma(u+v)$.
On en déduit que

$$\begin{cases} \beta - (u+v) = 0 \\ \gamma - (u+v)\beta = p \\ -\gamma(u+v) = q \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \beta = (u+v) \\ \gamma = (u+v)\beta + p = (u+v)^2 + p = (u+v)^2 - 3uv \end{cases}$$

On vérifie que la 3^{ime} équation du système est vraie :
$-\gamma(u+v) = [-(u+v)^2 + 3uv](u+v) = -(u+v)^3 + 3u^2v + 3uv^2 = -u^3 - v^3 = q$
par conséquent $x^3+px+q = (x-(u+v))[x^2+(u+v)x+(u+v)^2-3uv]$
Le discriminant de $x^2 + (u+v)x + (u+v)^2 - 3uv$ est
$\Delta = (u+v)^2 - 4(u+v)^2 + 12uv = 12uv - 3(u+v)^2 = -3(u-v)^2 < 0$
car $u \neq v$ donc $u+v$ est racine unique de (E)

(c) Soit l'équation $(F) : x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$ de discriminant
$\Delta = q^2 + 4\dfrac{p^3}{27} = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$.
Si $27q^2 + 4p^3 > 0$ alors (F) a deux solutions réelles distinctes que l'on peut noter u^3 et v^3.

$$\begin{cases} u^3 = \dfrac{-q + \sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \\ \\ v^3 = \dfrac{-q - \sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

donc en prenant u et v racines cubiques de u^3 et v^3 avec $uv = -\dfrac{p}{3}$ on alors $u + v$ racine unique de (E).
Donc la seule solution de (E) est

$$\boxed{x = u + v = \sqrt[3]{\dfrac{-q + \sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{-q + \sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}}}$$

(Formules de Gerolamo Cardano)

2. (a) Montrer que si u^3 est la racine double de $(F) : x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$ alors $2u$ et $-u$ sont les racines de l'équation (E)
   (b) Donner dans ce cas l'écriture de ces racines en fonction de p et de q ainsi que sa condition d'existence.(Formule de Gerolamo Cardano)
3. On se place dans le cas où (F) n'a pas de solution à savoir $4p^3 + 27q^2 < 0$
   (a) On fait dans (E) le changement de variable défini par $x = \lambda y$ avec $\lambda > 0$ tel que $\lambda^2 = -\dfrac{4}{3}p$.
   Montrer que (E) se met sous la forme $(G) : 4y^3 - 3y = \gamma$ où l'on déterminera γ.
   (b) Montrer qu'il est toujours possible de poser $\gamma = \cos(\theta)$
   (c) Déduire de l'équation (G) mise sous la forme $4y^3 - 3y = \cos(\theta)$ que $-1 \leq y \leq 1$
   (d) Poser alors $y = \cos(\alpha)$ et mettre (G) sous la forme $\cos(3\alpha) = \cos(\theta)$. En déduire que (E) admet 3 solutions.
4. Applications :
   (a) Résoudre l'équation : $x^3 - 7x^2 + 17x - 20 = 0$
   (b) Résoudre l'équation : $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$

4 Historique

Le premier problème célèbre est celui de la duplication du cube.
Vers -250 Archimède pose le problème de la découpe d'une sphère pleine par un plan en 2 parties tels que les volumes obtenus soient dans un rapport donné. En 1545, le mathématicien italien Gerolamo Cardano(Jérôme Cardan) publie une méthode de résolution algébrique développée par Niccolò Tartaglia des équations du troisième degré où la racine est exprimée en fonction de leurs coefficients. L'élève de Cardan, Ludovico Ferrari, et Tartaglia découvrent une solution algébrique pour des équations du quatrième degré.

En 1629, le mathématicien français, Albert Girard, admet la possibilité qu'une équation ait des racines négatives ou des racines complexes. Il est ainsi en mesure de compléter les découvertes partielles de François Viète concernant les relations entre les racines et les coefficients d'une équation algébrique. Viète avait découvert que si a et b sont les racines de $x^2 - px + q = 0$, alors $p = a + b$ et $q = a \times b$.

Plus généralement, Viète démontre que, si le coefficient de plus haut degré de l'équation $p(x) = 0$ est 1, alors l'opposé du coefficient d'ordre suivant est égal à la somme de toutes les racines ; le troisième coefficient suivant est égal à la somme de tous les produits de deux racines, et l'opposé du quatrième coefficient est égal à la somme de tous les produits de trois racines. Si le degré de l'équation est pair, le dernier coefficient est le produit de toutes les racines ; s'il est impair, l'opposé de ce coefficient est égal au produit de toutes les racines. Viète apporte également une contribution importante aux méthodes numériques d'approximation des racines d'équations.

En 1635, René Descartes publie un texte sur la théorie des équations, avec notamment une règle des signes permettant de déterminer le nombre de solutions positives et négatives d'une équation. Quelques décennies plus tard, Isaac Newton indique une méthode itérative pour trouver les racines d'une équation, incluant le cas particulier de la méthode de Héron décrite ci-dessus ; elle est connue aujourd'hui sous le nom de méthode de Newton-Raphson.

À la fin du 18^{me} siècle, le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss démontre que toute équation polynômiale a au moins une solution. Il reste cependant à déterminer si cette racine peut s'exprimer à l'aide d'une formule algébrique faisant intervenir les coefficients de l'équation, comme c'est le cas pour les équations de premier, second, troisième et quatrième degrés. Dans le cadre de cette recherche, le Français Joseph Lagrange développe une méthode de permutation des racines d'une équation. Cette idée est reprise par l'Italien Paolo Ruffini, le Norvégien Niels Abel et le Français Évariste Galois. Les travaux de ces quatre mathématiciens conduisent à une théorie complète des racines des polynômes. D'après cette dernière, une équation polynômiale peut être résolue à l'aide d'une formule algébrique générale, seulement si le degré du polynôme est inférieur à cinq. Les travaux de Galois donnent également la réponse à deux célèbres problèmes posés par les Grecs : Galois démontre qu'en utilisant seulement un compas et une règle, il est impossible de partager un angle quelconque en trois parties égales et de construire un cube dont le volume est le double du volume d'un cube donné.