Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

Christian Jean CYRILLE

22 février 2025

"Le seul objet naturel de la pensée mathématique est le nombre entier. C'est le nombre extérieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute mais qu'il nous a forcés d'inventer."
Henri POINCARE , *La valeur de la science*.

1 Définition des réels

1.1 Définition d'une coupure de Dedekind

En mathématiques, une **coupure de Dedekind d'un ensemble totalement ordonné** E est un couple (A, B) de sous-ensembles de E, lesquels forment à eux deux une partition de E, où tout élément de A est inférieur à tout élément de B.

1.2 Définition d'une coupure de $\mathbb{Q}$

On dit qu'on a réalisé **une coupure dans** $\mathbb{Q}$ lorsqu'on forme deux sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ appelés **classe inférieure** $\mathcal{I}$ et **classe supérieure** $\mathcal{S}$ tels que :

1. Tout rationnel est soit dans $\mathcal{I}$ soit dans $\mathcal{S}$.
2. $\mathcal{I} \neq \emptyset$ et $\mathcal{S} \neq \emptyset$
3. Tout rationnel $r \in \mathcal{I}$ est inférieur à tout rationnel $r' \in \mathcal{S}$

1.3 Exemple

Soit $\mathcal{I} = \{r \in \mathbb{Q}$ tels que $r < 0$ ou $(r \geq 0$ et $r^2 < 2)\}$.
Soit $\mathcal{S} = \{r \in \mathbb{Q}$ tels que $r \geq 0$ et $r^2 \geq 22\}$.
On a ainsi réalisé une coupure dans $\mathbb{Q}$ car les 3 conditions précédentes sont vérifiées.

1.4 Définition d'un rationnel et d'un irrationnel par une coupure

Dedekind, dans son ouvrage de 1872, s'appuie sur une représentation géométrique :
la représentation de la droite réelle et sa restriction à l'ensemble des rationnels.
Il observe que l'on peut couper cette droite en deux parties.

- **si la coupure se fait sur un rationnel** r, le découpage donne deux parties qui peuvent être :
  - ◇ $A = \{a \in \mathbb{Q}$ tels que $a < r\}$ et $B = \ b \in \mathbb{Q}$ tels que $b \geq r\}$
    ou $A' = \{a \in \mathbb{Q}$ tels que $a \leq r\}$ et $B' = \ b \in \mathbb{Q}$ tels que $b > r\}$

  - Dans ce premier cas, il associe le rationnel r aux coupures (A, B) et (A', B') qu'il considère comme seulement légèrement différentes.
- **si la coupure se fait sur un irrationnel** x , le découpage donne deux parties qui sont :
  - $A = \{a \in \mathbb{Q}$ tels que $a < x\}$ et $B =\ b \in \mathbb{Q}$ tels que $b > x\}$
  - Dans ce second cas, il « crée » un nouveau nombre irrationnel représenté par la coupure (A, B)

2 Propriétés

2.0.1

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2.0.2

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

2.0.3

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

2.0.4

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps **premier** c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autre corps strictement inclus dans $\mathbb{Q}$.

Soit $\mathbb{Q}'$ un sous-corps inclus dans $\mathbb{Q}$. Nous allons démontrer que $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$.

- On a bien entendu $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{Q}$.
- Nous allons démontrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}'$.
  - On a $1_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}'$ car $\mathbb{Q}'$ sous corps de $\mathbb{Q}$. Mais comme $+$ est interne dans $\mathbb{Q}'$ alors $1 + 1 = 2 \in Q'$ et par récurrence , on prouve que tout entier naturel $n \in \mathbb{Q}'$
  - Comme $\mathbb{Q}'$ est un groupe, tout élément $n \in \mathbb{Q}'$ admet un symétrique $-n \in \mathbb{Q}'$.
    Par conséquent, tout entier relatif $n \in \mathbb{Q}'$.
  - Comme tout élément d non nul de $\mathbb{Q}'$ admet un inverse $\dfrac{1}{d} \in \mathbb{Q}'$
  - Soit un rationner$r = \dfrac{n}{d} \in \mathbb{Q}$ alors $r = n \times \dfrac{1}{d}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}$ donc comme $\times$ est interne dans $\mathbb{Q}'$ alors $r = n \times \dfrac{1}{d}$
- Comme $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}'$ alors $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$.

2.0.5 Les racines carrées d'un nombre premier sont des irrationnels

Démontrer que si p est un entier naturel premier alors $\sqrt{p}$ est un irrationnel.

Corrigé
Raisonnons par l'absurde. supposons que $\sqrt{p}$ est un nombre rationnel.
Alors $\exists n \in \mathbb{Z} \quad \exists d \in \mathbb{N}^* \qquad \sqrt{p} = \dfrac{n}{d}$

Par conséquent, $p = \dfrac{n^2}{d^2}$ donc $pd^2 = n^2$.
Or tout entier naturel est décomposable en produits d'entiers premiers ce qui est le cas de d^2 et de n^2.
L'exposant de l'entier premier p dans les entiers n^2 et dans d^2 est pair .
Mais alors l'exposant de l'entier premier p dans l'entier pd^2 est impair alors que cet exposant est pair dans n^2. Ce n'est pas possible car $pd^2 = n^2$.
Par conséquent, $\sqrt{p}$ ne peut être un nombre rationnel. c'est donc un nombre irrationnel.

2.1 Théorème HLW : dHermite-Linderman-Waierstrass

On admet le résultat suivant

> Soit un entier $r \geq 2$.
> Si $a_1, a_2, \cdots, a_r$ sont des nombres rationnels distincts deux à deux alors
>
> $$e^{a_1}, e^{a_2}, \cdots, e^{a_r} \text{ sont linéairement indépendants sur } \mathbb{Q}$$
>
> .

Démonstration Cf sujet Maths X-Ens24MP-D

2.1.1 Corollaire : le logarithme d'un nombre rationnel positif $\neq 1$ est irrationnel

> Soit $a \in \mathbb{Q}^{+*} - \{1\}$ alors $ln(a) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $ln(a) \in \mathbb{Q}$.
$a = exp(ln(a)$ donc $a - e^{ln(a)} = 0$ ou encore $a.e^0 - 1.e^{ln(a)} = 0$. Or les rationnels a et 1 sont distincts donc d'après le Théorème HLW, on devrait avoir $(e^0, e^{ln(a)}))$ distincts puisque $ln(a) \neq 0$ et linéairement indépendants dans Q .
Or ce n'est pas le cas car on a une combinaison linéaire nulle de $(e^0, e^{ln(a)})$ avec un au moins des coefficients rationnels qui n'est pas nul. Impossible.
par conséquent, $ln(a)$ est irrationnel.

2.1.2 Corollaire : e^a est transcendant si $a \in \mathbb{Q}^{+*}$

> Soit $a \in \mathbb{Q}^*$ alors $\forall P \in \mathbb{Q}[X] \quad P(e^a) \neq 0$

Démontrons la contraposée :
supposons $\exists P = \sum_{k=1}^{n} p_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$ et $P(e^a) = 0$.
On a donc $\sum_{k=1}^{n} p_k e^{ak} = 0$ d'où l'existence d'une combinaison linéaire nulle avec des coefficients rationnels $p_0, p_1, \cdots, p_n$ des éléments $e^0, e^a, e^{2a}, \cdots, e^{na}$ avec des nombres rationnels $0, a, 2a, \cdots, na$ distincts car $a \neq 0$. Ceci est impossible d'après le théorème HLW.
Par conséquent, $\forall P \in \mathbb{Q}[X] \quad P(e^a) \neq 0$.

3 Exercices

3.1 Irrationnalité de e

3.1.1 Sujet

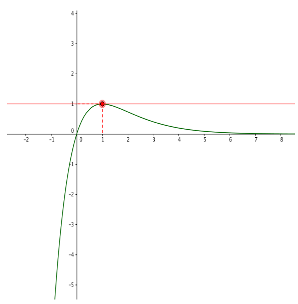
3.1.2 Corrigé

Partie A
Soit la fonction numérique d'une variable réelle f définie par $f(x) = x\, e^{1-x}$.

1. - Etant donné que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ alors e^{1-x} est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f(x) = x\, e^{1-x}$ est bien défini sur $\mathbb{R}$
   - f est dérivable (donc continue) sur R car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
     — $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$;
     — $x \mapsto e^{1-x}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de 2 fonctions
       — $x \mapsto 1 - x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$
       — la fonction exponentielle qui est dérivable sur $\mathbb{R}$
       — $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $1 - x \in \mathbb{R}$
   - $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$ du signe du binôme $1 - x$ car $e^{1-x} > 0$
   - Quand $x \mapsto -\infty$ on a $1 - x \mapsto +\infty$ et donc $e^{1-x} \mapsto +\infty$ donc $x\, e^{1-x} \mapsto -\infty$
   - $f(x) = x\dfrac{e}{e^x}$ donc quand $x \mapsto +\infty$ on a $\dfrac{x}{e^x} \mapsto 0$ donc $f(x) \mapsto 0$
   -

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
			1		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				0

2. Voici la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan $\mathcal{P}$

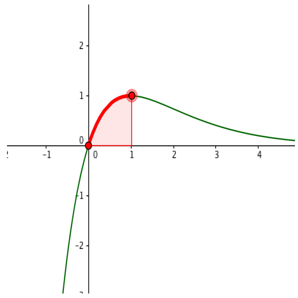


3. (a) Comme f est continue sur $[0;1]$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est intégrable sur $[0;1]$ donc $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ existe
   (b) Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{1-x}$ alors $u'(x) = 1$ et on peut choisir $v(x) = -e^{1-x}$

(c) u et v étant toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ on peut alors intégrer I_1 par parties :

(d) $I_1 = [-xe^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}\,dx = [-xe^{1-x} - e^{1-x}]_0^1 = e - 2$

$I_1 = e - 2$ représente en unités d'aire la mesure du domaine plan déterminé par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ de f et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$



Partie B

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,dx$

1. (a) Soit $x \in [0;1]$ alors $0 \leq x \leq 1$ donc $-0 \geq -x \geq -1$ d'où $1 \geq 1 - x \geq 0$ c'est-à-dire $0 \leq 1 - x \leq 1$.
   Or exp est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$ par conséquent $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ c'est-à-dire $1 \leq e^{1-x} \leq e$. Or $x^n \geq 0$ donc l'on a : $x^n \leq x^n\, e^{1-x} \leq e\, x^n$

   (b) La fonction polynôme $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$ donc est intégrable sur cet intervalle. $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$ existe et vaut $[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

   (c) Comme les bornes 0 et 1 sont dans l'ordre croissant, comme sur cet intervalle pour tout entier $n \geq 1$ l'on a : l'on a : $x^n \leq x^n\, e^{1-x} \leq e\, x^n$ alors $\int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,dx \leq \int_0^1 e\, x^n\,dx$
   donc $\int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,dx \leq e\ \int_0^1 x^n\,dx$. Or $J_n = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$
   donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

   (d) D'après le théorème des gendarmes comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$
   alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n = 0$

2. Soit $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\, e^{1-x}\,dx$. Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \Longrightarrow u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = e^{1-x} \Longleftarrow v(x) = -e^{1-x} \end{array} \right.$$

   u et v sont toutes deux de classe $\mathcal{C} - 1$ sur $[0;1]$ donc on peut intégrer par parties :
   $I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\,(-e^{1-x})\,dx = -1 + (n+1)\int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,dx = (n+1)I_n - 1$

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $k_n = n!\, e - I_n$ où factorielle de n : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ est le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

(a) $k_{n+1} = (n+1)!\ e - I_{n+1} = (n+1)\ n!e - (n+1)I_n + 1 = (n+1)(n!\ e - I_n) + 1 = (n+1)k_n + 1$

(b) $k_1 = 1!\ e - I_1 = e - I_1 = e - (e-2) = 2$
Démontrons par récurrence sur n que k_n est un nombre entier pour tout entier $n \geq 1$.
Posons $pr(n)$: "$k_n \in \mathbb{N}$"

- étape 1 : initialisation pour $k = 1$ $k_1 \in \mathbb{N}$ car $k_1 = 2$.
- étape 2 : hérédité
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $k_n \in \mathbb{N}$ alors $(n+1)k_n + 1 \in \mathbb{N}$ donc $k_{n+1} \in \mathbb{N}$.
- pr est initialisée en 1 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
  Par conséquent, $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad k_n \in \mathbb{N}$.

(c) On sait déjà que $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$ donc $k_n + \dfrac{1}{n+1} \leq k_n + I_n \leq k_n + \dfrac{e}{n+1}$.
Soit $n \geq 2$ alors $n+1 \geq 3$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{3}$ d'où $\dfrac{e}{n+1} \leq \dfrac{e}{3}$. Or $e \leq 3$ donc $\dfrac{e}{n+1} \leq \dfrac{3}{3}$.
Par conséquent $k_n \leq k_n + \dfrac{1}{n+1} \leq k_n + I_n \leq k_n + \dfrac{e}{n+1} k_n + 1$.
Comme k_n et k_{n+1} sont deux entiers consécutifs alors $n!\ e = k_n + I_n$ n'est pas un nombre entier car il est strictement compris entre deux entiers consécutifs.

4. (a) Soient p et q deux entiers strictement positifs.
Supposons que $n \geq q$ alors $\dfrac{n!\ p}{q} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (q-1) \times q \times (q+1) \times \cdots \times n \times p}{q} =$
$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (q-1) \times (q+1) \times \cdots \times n \times p$ est un nombre entier.

(b) Raisonnons par l'absurde. Supposons que e est un nombre rationnel donc il existerait p et q deux entiers strictement positifs tels que $e = \dfrac{p}{q}$.
Mais alors $n!\ e = n!\dfrac{p}{q}$ serait un entier donc $k_n + I_n$ serait aussi un entier.
Or cela est faux. Donc l'hypothèse e rationnel est fausse.
On en déduit que le nombre e est irrationnel.

3.2 EnacPilotes 19