Ensembles

Christian CYRILLE

29 mars 2020

"Il n'y a pas de mathématiques modernes. Ces deux mots anodins font pourtant régner la terreur dans des millions de foyers où les parents, angoissés, "sèchent" sur des problèmes donnés à leurs fils en quatrième. "
Jean Rostand

1 Définition d'un ensemble

Un ensemble peut être déterminé :

- soit en extension lorsque le nombre de ses éléments n'est pas très élevé. On définit l'ensemble en donnant la liste de ses éléments.
  ex : l'ensemble des résultats du jet d'un dé est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- soit en compréhension par une propriété caractéristique.
  ex : l'ensemble des entiers pairs

On appelle ensemble vide qu'on note $\emptyset$ un ensemble qui n'a aucun élément

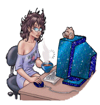
2 Appartenance

Lorsqu'un objet x appartient à un ensemble E , on écrit $x \in E$.
Dans le cas contraire on écrit $x \notin E$.

3 Parties ou sous-ensembles d'un ensemble E

3.1 Définition

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E ou que A est une partie de E ou que A est un sous-ensemble de E lorsque l'implication : $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in E$ est vraie.
On écrit alors $A \subseteq E$.
Lorsque A est strictement inclus dans E, on écrit $A \subset E$
Un ensemble A n'est pas inclus dans un ensemble E lorsque :$\exists x \; x \in A$ et $x \notin E$.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.



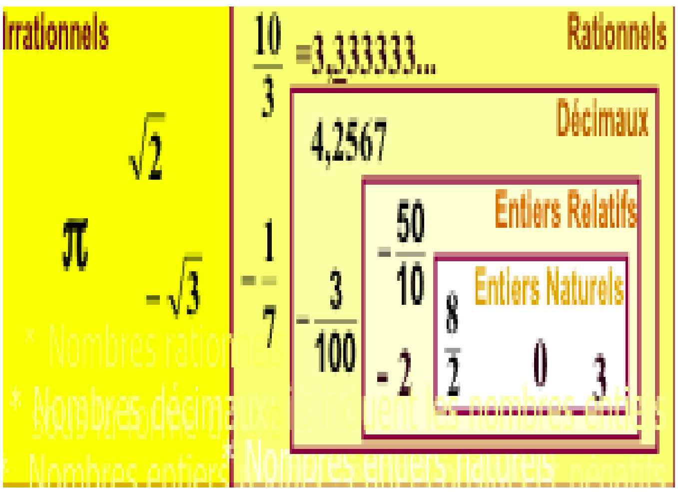
3.2 Remarque

Attention à ne pas confondre la relation d'appartenance $\in$ et la relation d'inclusion $\subset$.

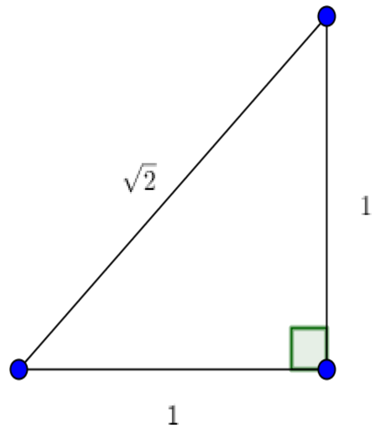
1. La relation d'appartenance concerne un objet et un ensemble.
2. La relation d'inclusion concerne deux ensembles.
3. Bien entendu, $x \in E \iff \{x\} \subset E$

3.3 Exemples

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$\mathbb{N}$ = l'ensemble des entiers naturels = $\{0; 1; 2; 3; \cdots\}$
$\mathbb{Z}$ = l'ensemble des entiers relatifs = $\{\cdots; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots.\}$
$\mathbb{D}$ = l'ensemble des nombres décimaux = l'ensemble des nombres avec un nombre fini de chiffres après la virgule = l'ensemble des nombres qui ont la forme suivante : $\dfrac{entier\ relatif}{puissance\ positive\ de\ 10}$
$\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres rationnels = l'ensemble des nombres qui ont la forme suivante : $\dfrac{entier\ relatif}{entier\ relatif\ non\ nul}$
$\mathbb{R}$ = l' ensemble des nombres réels = $]-\infty; +\infty[$
$\mathbb{C}$ = l'ensemble des nombres complexes = $\{x + iy / x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$
$\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$ l'ensemble des nombres irrationnels.
$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; \sqrt{2} + \sqrt{3}; \sqrt{3} - \sqrt{2}; \sqrt{15}; \ln(\frac{3}{2}); \sqrt[3]{2}; \pi^2$;sin(10°) ;sin(20°) ;cos(5°) ;tan(25°) sont des irrationnels.



3.4 Exercice : $\sqrt{2} \notin \mathbb{D}$



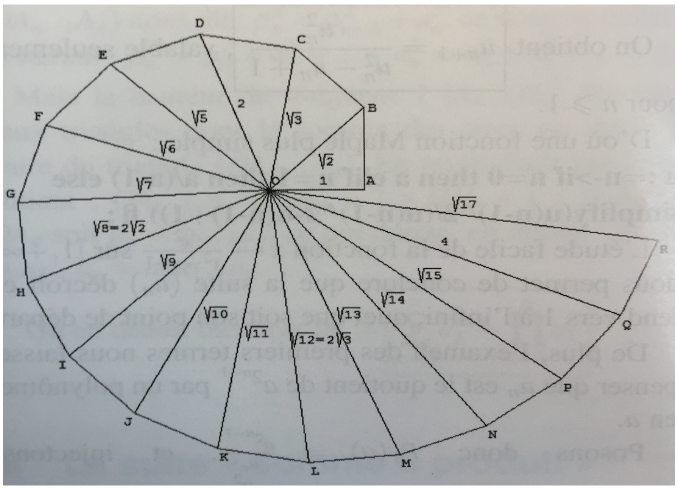
Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Raisonnons par l'absurde. supposons que $\sqrt{2}$ est un décimal donc il a un développement décimal fini. Soit x le dernier chiffre de ce développement décimal. On sait que $\sqrt{2}^2 = 2$ donc

- ou $x = 1$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 1 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 2$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 4 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 3$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 9 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 4$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 6 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 5$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 5 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 6$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 6 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 7$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 9 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 8$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 4 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 9$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 1 donc il est impossible d'obtenir 2

Par conséquent, on aboutit à une contradiction donc $\sqrt{2}$ ne peut être un nombre décimal.

3.5 Exercice : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



> 1. Démontrer que si un entier n est pair alors son carré n^2 est pair
> 2. Démontrer que si un entier n est impair alors son carré n^2 est impair
> 3. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (c'est-à- dire ne peut se mettre sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier relatif non nul).

3.5.1 Corrigé

1. soit un entier n pair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ donc son carré $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ où $k' = 2k^2$ est un entier naturel donc n^2 est pair
2. soit un entier n impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ donc son carré $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ où $k' = 2k^2 + 2k)$ est un entier naturel donc n^2 est impair
3. Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ irréductible avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ donc $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$.
   Par conséquent $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair donc p est pair d'où $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.
   Comme $p^2 = 2q^2$ alors $(2k)^2 = 2q^2$. On en déduit que $q^2 = 2k^2$ donc q^2 est pair d'où $\exists k' \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2k'$
   Mais alors la fraction $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2k}{2k'} = \dfrac{k}{k'}$ est réductible. Contradiction. Donc l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

L'ensemble des entiers naturels pairs (ou l'ensemble des multiples de 2) est $\{x = 2k/k \in \mathbb{N}\}$ est inclus strictement dans $\mathbb{N}$
L'ensemble des entiers naturels impairs est $\{x = 2k+1/k \in \mathbb{N}\}$ est inclus strictement dans $\mathbb{N}$

3.6 Propriétés

1. **Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \subset E$.**
   $\emptyset$ s'appelle la partie vide de E.
2. **Pour tout ensemble E , on a $E \subseteq E$.**
   E s'appelle la partie pleine de E
3. **Quelques exemples :**
   - si $E = \{a\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}\}$
   - si $E = \{a; b\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$
   - si $E = \{a; b; c\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; \{a, b, c\}\}$
   - si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$
4. **si E est un ensemble fini ayant n éléments alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties a 2^n éléments**
   Démonstration : Pour créer l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E,
   - on place d'abord la seule partie à 0 éléments qui est l'ensemble vide $\emptyset$
   - puis les parties à 1 élément qu'on appelle les singletons,
   - les parties à 2 éléments qu'on appelle les paires,
   - celles à 3 éléments ,
   - ...
   - celles à $n - 1$ éléments
   - et enfin la seule partie à n éléments, la partie pleine c'est-à-dire l'ensemble E lui-même.

   Par conséquent,
   - si $E_1 = \{a\}$ alors $\mathcal{P}(E_1) = \{\emptyset; \{a\}\}$
   - si $E_2 = \{a; b\}$ alors $E_2 = E_1 \cup \{b\}$ et $\mathcal{P}(E_2) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$
   - si $E_3 = \{a; b; c\}$ alors $E_3 = E_2 \cup \{c\}$ et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$

   On peut donc remarquer que lorsque l'on ajoute un élément rouge à un ensemble E_i , alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $E_i \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E_i auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.
   Donc il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge x que d'anciennes parties n'ayant pas x.
   On pose $pr(n)$:" le nombre de parties d'un ensemble ayant n éléments est 2^n"
   - Etape 1 : initialisation
     A-t-on $pr(0)$?
     c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant 0 éléments est 2^0 ?
     Oui car si $Card(E) = 0$ c'est que $E = \emptyset$ donc $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. $\mathcal{P}(E)$ n'a donc qu'un seul élément.
     Par conséquent $pr(0)$ est vraie.
   - Etape 2 : hérédité
     Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
     c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est $2^k \Longrightarrow$ que le nombre de parties d'un ensemble ayant $k+1$ éléments est 2^{k+1}
     Supposons que l'hypothèse de récurrence suivante " le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est 2^k " soit vraie.

Soit un ensemble F ayant $k+1$ éléments. Isolons un élément x de F . Par conséquent $F = E \cup \{x\}$ où E a k éléments.
Alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $F = E \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.
Or d'après l'hypothèse de récurrence, $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^k$ et de plus il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge que d'anciennes parties n'ayant pas $\{x\}$
donc $Card(\mathcal{P}(F)) = 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{1+k}$ CQFD.

- Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire
  donc pour tout entier naturel n, si $Card(E) = n$ alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$"

5. **On appelle $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments d'un ensemble E ayant n éléments. Ceci se notait auparavant C_n^p. On parle aussi du nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n.**

6. (a) **Si $p > n$ alors** $\binom{n}{p} = 0$
   normal car on peut pas former de parties ayant plus d'éléments que l'ensemble E.

   (b) **Pour tout entier naturel n,** $\binom{n}{0} = 1$
   car il n' y a qu'une seule partie ayant 0 élément dans l'ensemble E : c'est la partie vide $\emptyset$

   (c) **Pour tout entier naturel n,** $\binom{n}{n} = 1$
   car il n' y a qu'une seule partie ayant n éléments dans l'ensemble E : c'est la partie pleine E

   (d) **Pour tout entier naturel n,** $\binom{n}{1} = n$
   car il n'y a que n parties ayant un seul élément dans un ensemble E : ce sont les singletons de chacun des éléments de E.

   (e) **Pour tout p compris entre 0 et n,** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
   car choisir p éléments dans un ensemble E est équivalent à choisir $n-p$ éléments dans cet ensemble.

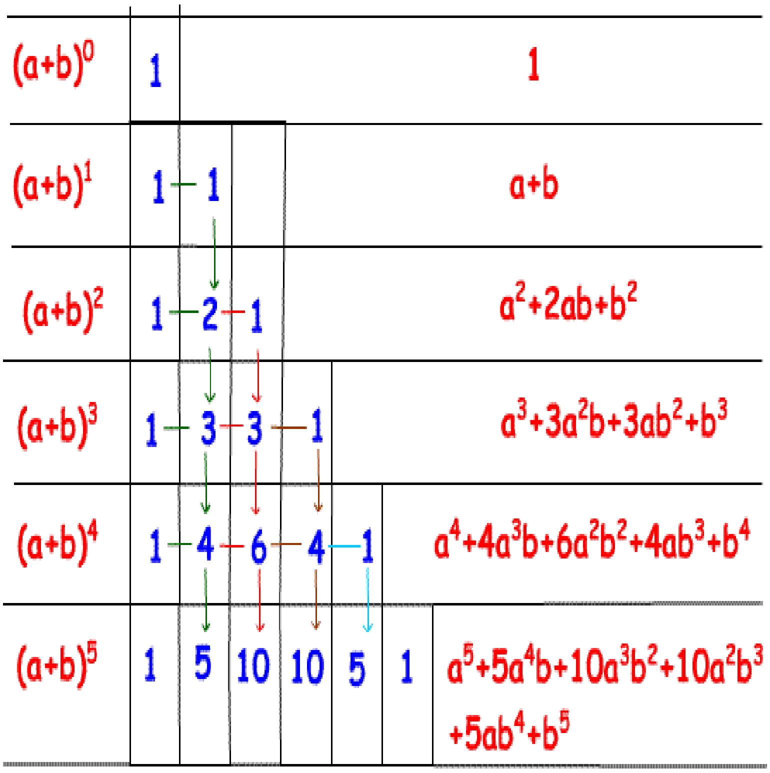
   (f) **Pour tout p compris entre 0 et n** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
   Cette formule s'appelle la Grande Formule de PASCAL.
   Démonstration : On isole un élément x de E.
   $\binom{n}{p}$ est le nombre total de parties à p éléments = nombre de parties à p éléments contenant x plus le nombre de parties à p éléments ne contenant pas x = $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

   (g) **Formule du binôme de Newton :**
   Pour tous réels a et b l'on a
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

   (h) d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

(i) **Pour tout entier naturel** n**,** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ **en posant** $x = 1$

(j) **Pour tout entier naturel** n**,** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ **en posant** $x = -1$



Triangle dit de PASCAL (en fait retrouvé chez dans les manuscrits Miroir de Jade des 4 inconnues du chinois SHOU-CHI-YIE en 1303 et dans les travaux chez de l'indien BASKHARA 1114-1185)

On peut remarquer que :

- Dans la colonne correspondant à $p = 1$ on retrouve les entiers naturels
- Dans la colonne correspondant à $p = 2$ on retrouve les nombres triangulaires $T_n = \sum_{k=1}^{n} k$
  - $T_1 = 1$
  - $T_2 = 1 + 2 = 3$
  - $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
  - $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
  - $T_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- La somme des éléments de chaque ligne est 2^n.
  Par exemple, pour $n = 4$ on a $S = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$
- Si on additionne les termes de chaque ligne affectés alternativement des signes $+$ et $-$ on obtient comme somme : 0
  Par exemple, pour $n = 5$ on a $S = 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$

Démonstration par récurrence de la Formule du binôme de Newton (1642-1727)
Soient a et b des nombres réels donc $ab = ba$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i\, b^{n-i}$$

Or $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}\, b^j$$

en effectuant le changement d'indice $j = n - i$

Démonstration :
Notons $pr(n)$: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i\, b^{n-i}$.

1. Initialisation : elle est vraie en $n = 0$ car :
   $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0\, b^{0-0}$
2. Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un entier fixé $k \geq 0$ c'est-à-dire que :
   $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^k\, b^{n-k}$
   Alors $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^k\, b^{n-k}]$
   $= (a+b)(\binom{k}{0} a^0 b^k + \binom{k}{1} a^1\, b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^i\, b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1}\, b^1 + \binom{k}{k} a^k b^0)$
   $= (a+b)(b^k + \binom{k}{1} a^1\, b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^i\, b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1}\, b^1 + a^k)$
   $= (ab^k + \binom{k}{1} a^2\, b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^{i+1}\, b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^k\, b^1 + a^{k+1}$
   $+ b^{k+1} + \binom{k}{1} a^1\, b^k + \cdots + \binom{k}{i} a^i\, b^{k-i+1} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1}\, b^2 + a^k b)$
   $= b^{k+1} + ab^k[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}] + a^2\, b^{k-1}[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}] + \cdots + a^i\, b^{k-i+1}[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}] +$
   $a^{i+1}\, b^{k-i}[\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}] + \cdots + a^k\, b^1[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}] + a^{k+1}$
   $= b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2\, b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \cdots + a^i\, b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} + a^{i+1}\, b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} +$
   $\cdots + a^k\, b^1 \binom{k+1}{k} + a^{k+1}$
   $= \binom{k+1}{0} a^0 b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2\, b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \cdots + a^i\, b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} + a^{i+1}\, b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} +$
   $\cdots + a^k\, b^1 \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} a^{k+1} b^0$
3. Conclusion : pr étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$

Cette formule est valable pour tous éléments a et b d'un anneau à condition que ces éléments soient commutables c'est-à-dire que $ab = ba$.
C'est le cas pour des matrices carrées d'ordre n : A et B à condition d'avoir vérifié que $AB = BA$.
Souvent $A = I$ la matrice de l'identité donc $IB = B$ et $BI = B$ donc $IB = BI$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (I + B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I^{n-j}\ B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I\ B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j$$

Exemple :

> Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
> Déterminer une écriture simplifiée de A^npour tout entier naturel n.

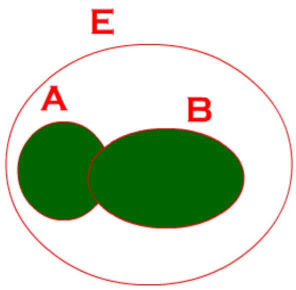
Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = I + J$
- $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  La matrice J est dite **nilpotente**.
  On peut alors démontrer par récurrence que $\forall n \geq 2 \quad J^n = O$.
  En effet,
  — $J^2 = 0$ la propriété est vraie au rang $n = 2$
  — Soit un entier $k \geq 2$ supposons que $J^k = O$ alors $J^{k+1} = J\ J^k = J\ O = O$
  — La propriété étant initialisée en 2 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$
- Alors comme I et J sont commutables puisque $IJ = JI$ car $IJ = J$ et $JI = J$
  on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :
  $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}\ J^k$
  $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I\ J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k$
  Or à partir de $k = 2$ on a $J^k = O$
  Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} J^k = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 = I + nJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4 Opérations sur des ensembles

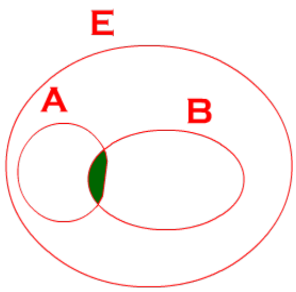
4.1 Union

Si A et B sont des parties de E alors la réunion de A et de B qu'on note $A \cup B$ est la partie de E formée des éléments de A et des éléments de B
Plus formellement $A \cup B = \{x \in E / x \in A \; ou \; x \in B\}$



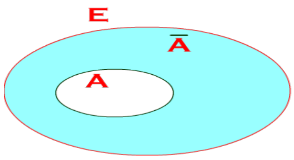
4.2 Intersection

Si A et B sont des parties de E alors l'intersection de A et de B qu'on note $A \cap B$ est la partie de E formée des éléments de A qui sont aussi des éléments de B
Plus formellement $A \cap B = \{x \in E / x \in A \; et \; x \in B\}$



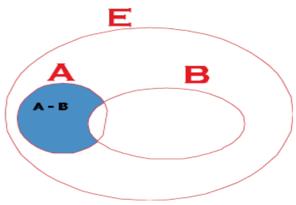
4.3 Complémentaire

Si A est une partie de E , alors on appelle complémentaire de A dans E , la partie formée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On note cette partie $\overline{A}$ ou $\mathcal{C}_E A$



4.4 Différence

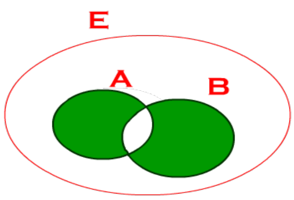
Si A et B sont des parties de E alors on appelle différence de A et B qu'on note $A - B$ ou $A \backslash B$ l'ensemble formé par les éléments de A n'appartenant pas à B.
$A \backslash B = A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$



4.5 Différence symétrique

Si A et B sont des parties de E alors on appelle différence symétrique de A et B qu'on note $A \Delta B$ l'ensemble formé par les éléments appartenant à un et un seul des ensembles A et B En fait, $A \Delta B = (A \bigcup B) - (A \bigcap B) = (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$.
On a quatre définitions équivalentes de $A \Delta B$:

1. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (\backslash A)$
2. $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$
3. $A \Delta B = (A \cup B) / (A \cap B)$
4. $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$



4.6 Propriétés les plus importantes

♡ ♡ ♡

Soit un ensemble E. Soient A et B des sous ensembles (ou des parties) de E. Alors :

1. $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cup A = A \\ A \cup E = E \\ A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \\ A \cup B = B \cup A \text{ (commutativité)} \\ \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ (associativité)} \end{cases}$

2. $\begin{cases} A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cap A = A \\ A \cap E = A \\ A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \\ A \cap B = B \cap A \text{ (commutativité)} \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ (associativité)} \end{cases}$

3. $\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ (distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ (distributivité de } \cup \text{ par rapport à } \cap) \end{cases}$

4. $\begin{cases} \overline{\overline{A}} = A \\ \overline{A} \cap A = \emptyset \\ \overline{A} \cup A = E \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$

5. $\begin{cases} A/B = \emptyset \iff A \subseteq B \\ A \cap (B/C) = (A \cap B)/(A \cap C) \\ ((A \cup B)/(A \cup C)) \subseteq A \cup (B/C) \end{cases}$

6. $\begin{cases} (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C) \text{ (associativité)} \\ A\Delta B = B\Delta A \text{ (commutativité)} \\ A\Delta\emptyset = A \text{ (l'ensemble vide } \emptyset \text{ est élément neutre dans } \mathcal{P}(E)) \\ A\Delta A = A \text{ (tout élément de } \mathcal{P}(E) \text{ est son propre symétrique)} \end{cases}$

$(\mathcal{P}(E), \Delta)$ **est donc un groupe abélien.**
De plus, $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ par rapport à Δ)
Par conséquent $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau.
Cet anneau est **un anneau de Boole** car tout élément A de vérifie $A \cap A = A$

5 Produit cartésien de deux ensembles

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F qu'on note $E \times F$, l'ensemble suivant : $E \times F = \{(x;y)/x \in E \; et \; y \in F\}$.
C'est l'ensemble des couples où le premier élément appartient à E et le deuxième élément appartient à F.

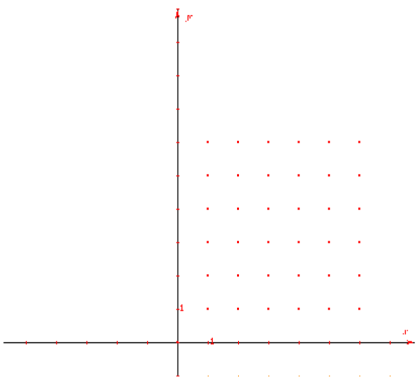
- Lorsque $E = F$, $E \times E$ se note E^2
- Le produit cartésien des ensembles E , F et G est :
  $E \times F \times G = \{(x;y;z)/x \in E, y \in F \; et \; z \in G\}$
  C'est l'ensemble des triplets où le premier élément appartient à E, le deuxième élément appartient à F et le troisième élément appartient à G
- On peut généraliser le produit cartésien à n ensembles :
  $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n$
- $E \times E \times E \times \cdots \times E($ n fois) se note E^n

5.1 Exemples

- $\{(x;y)/x \in \mathbb{R} \; et \; y \in \mathbb{R}\}$ se note $\mathbb{R}^2$
- Lorsque l'on jette 2 dés , l'ensemble des résultats possibles est l'univers
  $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6\}$ qu'on note encore $\{1;2;3;4;5;6\}^2$
  Ω est formé des 36 couples $(1;1);(1;2);\cdots;(6;5);(6;6)$ que l'on peut représenter par le tableau à 2 entrées ci-dessous :

$de1 \;\; de2$	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

ou par le dessin suivant



6 Exercices

6.1

Soit un ensemble $E = \{a; b; c\}$. Peut-on écrire ?

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\{\emptyset\} \subset E$

6.2

Les notations $\emptyset, \{\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ désignent-t-elles le même ensemble ?

6.3

Déterminer :

1. $\mathcal{P}(\emptyset)$
2. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
4. Quel est $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))$?

6.3.1 Corrigé

La démarche utilisée est de construire l'ensemble de parties $\mathcal{P}(E)$ en créant d'abord la partie vide, puis les parties à 1 élément, puis celles à 2 éléments , etc, jusqu'à la partie pleine E.

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
   On vérifie bien ici que comme $Card(\emptyset) = 0$ alors $\text{Card}(\mathcal{P}(\emptyset)) = 2^0 = 1$
2. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$
   On vérifie bien ici que comme $Card(\mathcal{P}(\emptyset)) = 1$ alors $\text{Card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = 2^1 = 2$
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{\emptyset; \{\emptyset\}\})$
   $= \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\{\emptyset\}\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}$
4. $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))) = 2^4 = 16$ car $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(P(\emptyset)))) = 4$

6.4

Donner des exemples de partitions des ensembles E suivants :

1. $E = \{a \; ; \; b \; ; \; c\}$
2. $E = \{\alpha \; ; \; \beta \; ; \; \gamma \; ; \; \delta \; ; \; \varepsilon\}$
3. $E =$ L'ensemble des chiffres du système décimal

6.5

Soit $E = \{a; b\}$. A quels ensembles appartient les éléments suivants :

1. $(a; b)$
2. $\{a\}$
3. $(a; \{b\})$
4. $(a; E)$
5. $\{\emptyset\}$
6. $(\emptyset; \{a\})$

6.6

Soit un ensemble E. Pour toutes parties A, B de E on note $A \star B = \overline{A \cup B}$.
Démontrer que ; $\cup$; $\cap$ s'obtiennent en utilisant seulement $\star$.

6.7

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\}, C = \{2, 4, 6\}, D = \{3, 6\}$

1. Déterminer $B \cap D, C \cap D$
2. Déterminer $B \cup C, C \cup D$. Une de ces réunions est-elle disjointe ?
3. Déterminer $C \Delta D$.
4. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

6.8

On considère les ensembles suivants :
$A = \{1, 2, 5\}; B = \{\{1, 2\}, 5\}; C = \{\{1, 2, 5\}\}; D = \{0, 1, 2, 5\}; E = \{5, 1, 2\}$
$F = \{\{1, 2\}\{5\}\}; G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}$ et $H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$

1. Donner le nombre d'éléments de chacun de ces ensembles.
2. Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existant entre ces ensembles ?
3. Déterminer $A \cap B$, $G \cup D$, E/G

6.9

On suppose que A, B et C sont des sous-ensembles d'un même ensemble E.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
2. $B \cup (A - B)$
3. $A \cap (\overline{A} \cup B)$
4. $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$
5. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

6.10

> Soient X et Y des ensembles. Démontrer l'équivalence logique suivante :
>
> $$X = Y \iff X \cap Y = X \cup Y$$

6.10.1 Corrigé

1. $\Longrightarrow$:
   Supposons que $X = Y$ alors $X \cap Y = X \cap X = X$ et $X \cup Y = X \cup X = X$
   donc $X \cap Y = X \cup Y$.CQFD.
2. $\Longleftarrow$:
   Supposons que $X \cap Y = X \cup Y$
   - Démontrons que $X \subset Y$:
     Soit $x \in X$. Comme $X \subset X \cup Y$ alors $x \in X \cup Y$. Or $X \cap Y = X \cup Y$ donc $x \in X \cap Y$ donc $x \in Y$. CQFD.
   - Par un démonstration analogue, en permutant les rôles symétriques de X et de Y on prouve que $Y \subset X$.
   - Comme $X \subset Y$ et $Y \subset X$ alors $X = Y$. CQFD.
3. Comme $X = Y \Longrightarrow X \cap Y = X \cup Y$ et que $X \cap Y = X \cup Y \Longrightarrow X = Y$
   alors $X = Y \iff X \cap Y = X \cup Y$

6.11 Agrégation Externe 1978

1. Vérifier que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de l'ensemble Ω muni de l'opération "différence symétrique" Δ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{P}(\Omega)\times\mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Omega) \\ & (x;y) & \longmapsto & x\Delta y = \{t\in\Omega \;/\; (t\in(x\cup y) \text{ et } t\notin(x\cap y)\} \end{array}$$

   est un groupe abélien.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ avec comme loi de groupe"additif "celle définie au 1°) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps à 2 éléments $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1}\}$ Grâce à quelle propriété particulière de cette loi de groupe, cela est-il possible ?
3. Quelle est alors la dimension de cet espace vectoriel $\mathcal{P}(\Omega)$?
   Fournir une base de cet espace.
4. Vérifier que l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathcal{P}(\Omega)\times\mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & (x;y) & \longmapsto & \alpha(x;y)=\mid \overline{x\cap y}\mid \end{array}$$

   est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{P}(\Omega)$

6.11.1 Corrigé

6.12 Différence symétrique de plusieurs ensembles

> Soit n entier ≥ 3. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des parties de E. Démontrer par récurrence que :
> $x \in A_1 \,\Delta\, A_2 \Delta \,\cdots\, \Delta A_n \iff x$ appartient à un nombre impair de A_i

6.12.1 Corrigé

6.13 Rationnels à racines carrées irrationnelles

1. Soit un entier naturel $b \in \mathbb{N}$.
   Démontrer l'équivalence logique suivante :
   $$b \text{ est un carré parfait} \iff \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$$
2. Soient a et b des entiers naturels **premiers**.
   Démontrer que :
   $$\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$$
3. Soient a, b, c, d quatre nombres rationnels tels que $d \geq 0$; $b \geq 0$; $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$
   Démontrer que :
   $$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \Longrightarrow (a = c) \text{ et } (b = d)$$

6.13.1 Corrigé

1. Soit un entier naturel $b \in \mathbb{N}^*$.
   (a) $\Longrightarrow$:
   Supposons que b est un carré parfait donc $\exists n \in \mathbb{N} \quad b = n^2$ alors $\sqrt{b} = n$.
   Or $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Donc $n \in \mathbb{Q}$ d'où $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.
   (b) $\Longleftarrow$:
   Pour démontrer que $\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow b$ est un carré parfait nous allons démontrer sa contraposée à savoir que : b n'est un carré parfait $\Longrightarrow \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.
   Soit b qui n'est pas un carré parfait. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ alors comme $\sqrt{b} \geq 0$ alors $\exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{b} = \dfrac{p}{q}$ irréductible donc $p \wedge q = 1$.
   Par conséquent , $b = \dfrac{p^2}{q^2}$ donc $p^2 = b\, q^2$.
   En utilisant le fait qu'un entier naturel se décompose en produit de facteurs premiers comme $p \wedge q = 1$ alors $p^2 \wedge q^2 = 1$ puisque p^2 et q^2 ont les mêmes facteurs premiers que p et q avec juste un exposant doublé.
   Or q^2 divise p^2 donc forcément $q^2 = 1$ puisque $p^2 \wedge q^2 = 1$.
   On obtient donc $b = p^2$ donc b est un carré parfait. Impossible donc $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. CQFD.

   Par conséquent, $\boxed{b \text{ est un carré parfait} \iff \sqrt{b} \in \mathbb{Q}}$
2. Soient a et b des entiers naturels premiers donc a et b ne sont pas des carrés parfaits donc $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.
   Supposons que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.
   Comme $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ alors $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ donc si $a - b \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.
   Par conséquent $\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \end{cases}$
   Par conséquent, par addition et par soustraction des deux lignes , $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.
   Cela est impossible.
   Par conséquent, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$

3. Soient a, b, c, d quatre nombres rationnels tels que $d \geq 0$; $b \geq 0$; $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$
   Supposons que $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$.

6.14 Partie entière d'un nombre réel

On admet que tout réel x est compris entre 2 entiers relatifs consécutifs n et $n+1$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists$ un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
Cet entier n qui est **le plus grand entier relatif précédant x s'appelle la partie entière de x** .
On le note $Ent(x)$ ou $[x]$ en Mathématiques. On a donc

$$[x] \leq x < [x]+1$$

1. Tracer avec précision dans un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la courbe représentative de la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui , à tout réel x associe $[x]$. Pour le graphique, on prendra $x \in [-4;4]$
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{Z}\ [x+k] = [x]+k$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$ encadrer le nombre $x-[x]$
4. Démontrer que l'application $epi : \mathbb{R} \mapsto [0;1[$ qui à tout réel x associe $epi(x) = x-[x]$ est périodique. Quelle est sa période ? Dessiner la courbe représentative de epi dans un autre repère pour $x \in [-4;4]$
5. Exprimer $[-x]$ en fonction de $[x]$. Justifier.
6. Dessiner avec précision les courbes des fonctions suivantes dans des repères différents :
   (a) f définie sur $[-4;4]$ par $f(x) = [|x|]$
   (b) g définie sur $[-2;2]$ par $g(x) = [2x]$
   (c) h définie sur $[-1;1]$ par $h(x) = [3x]$
   (d) i définie sur $[-4;4]$ par $i(x) = [\frac{x}{2}]$
   (e) j définie sur $[-6;6]$ par $j(x) = [\frac{x}{3}]$
   (f) k définie sur $[-2;2]$ par $k(x) = [x^2]$
   (g) l définie sur $[0;9]$ par $l(x) = [\sqrt{x}]$

   Pour chaque graphique, une justification est demandée. Attention aux bornes des intervalles.
7. Déterminer puis dessiner avec précision dans un repère orthonormé l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ tels que $[x]^2+[y]^2 = 0$
8. Soient les fonctions :
   $\delta : x \mapsto [\frac{1}{x^2+1}]$; $\omega : x \mapsto [\frac{x}{x^2+1}]$ et $s : x \mapsto \omega(x)-\omega(-x)$
   (a) Déterminer $\delta(x)$, $\omega(x)$ et $s(x)$ en fonction de x. Dessiner leurs courbes.
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a : $x([\frac{x}{x^2+1}]-[\frac{-x}{x^2+1}]) = |x|$
9. Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad [x+y] = [x]+[y]+\varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$
10. Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad [x-y] = [x]-[y]+\varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = -1$
11. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad [x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}] = [nx]$
12. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad [\frac{[nx]}{n}] = [x]$

6.14.1 Corrigé

On admet que tout réel x est compris entre 2 entiers relatifs consécutifs n et $n+1$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier n qui est le plus grand entier relatif précédant x s'appelle la partie entière de x . On le note $Ent(x)$ ou $[x]$ en Mathématiques. On a donc $[x] \leq x < [x]+1$

1. - si $-4 \leq x < -3$ alors $[x] = -4$
   - si $-3 \leq x < -2$ alors $[x] = -3$
   - si $-2 \leq x < -1$ alors $[x] = -2$
   - si $-1 \leq x < 0$ alors $[x] = -1$
   - si $0 \leq x < 1$ alors $[x] = 0$
   - si $1 \leq x < 2$ alors $[x] = 1$
   - si $2 \leq x < 3$ alors $[x] = 2$
   - si $3 \leq x < 4$ alors $[x] = 3$
   - si $x = 4$ alors $[x] = 4$

   Voici donc dans un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la courbe représentative de la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui , à tout réel x associe $[x]$. Pour le graphique, on prendra $x \in [-4;4]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $[x] \leq x < [x]+1$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}$ $[x]+k \leq x+k < [x]+1+k$. Or $[x]+k$ et $[x]+k+1$ sont deux entiers consécutifs donc $\boxed{[x+k] = [x]+k}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$ comme $[x] \leq x < [x]+1$ alors $[x]-[x] \leq x-[x] < [x]+1-[x]$ donc $\boxed{0 \leq x-[x] < 1}$. Lorsque x est un réel positif alors $x-[x]$ s'appelle aussi la partie décimale de x
4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ alors l'application $epi : \mathbb{R} \mapsto [0;1[$ qui à tout réel x associe $epi(x) = x - [x]$ est périodique de période k car :
   - L'ensemble de définition de epi qui est $\mathbb{R}$ est tel que $\forall x \in D_{epi}$ on $x+k \in D_{epi}$
   - $\forall x \in D_{epi}$ $epi(x+k) = (x+k) - [x+k] = x+k - ([x]+k) = x - [x] = epi(x)$

   La plus petite période k strictement positive est 1 donc "la" période de $x \mapsto [x]$ est 1.
   La courbe représentative de epi ressemble à un champ d'épis dans un autre repère pour $x \in [-4;4]$
5. Si $[x] \leq x < [x]+1$ alors $-[x] \geq -x > -[x]-1$ donc $-[x]-1 < -x \leq -[x]$ Donc pour exprimer $[-x]$ en fonction de $[x]$, il faudra distinguer 2 cas :
   (a) **ou bien x est un entier relatif** k alors $-x$ est l'entier $-k$ aussi donc $[-x] = [-k] = -k = -[x]$ donc $\boxed{[-x] = -[x]}$
   (b) **ou bien x n'est pas entier** alors $[x] < x < [x]+1$
   alors $-[x] > -x > -[x]-1$ donc $-[x]-1 < -x < -[x]$. Et comme $-[x]-1$ et $-[x]$ sont des entiers consécutifs alors $\boxed{[-x] = -[x]-1}$
6. Nous allons dessiner avec précision les courbes des fonctions suivantes dans des repères différents :
   (a) f définie sur $[-4;4]$ par $f(x) = [|x|]$
   L'ensemble de définition D_f est centré en 0 et $\forall x \in D_f$ $f(-x) = f(x)$ donc f est paire donc on étudie f sur $[0;4]$ et on complète la courbe en utilisant la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.
   (b) g définie sur $[-2;2]$ par $g(x) = [2x]$

- si $-2 \leq x < \frac{-3}{2}$ alors $-4 \leq 2x < -3$ donc $[2x] = -4$
- si $\frac{-3}{2} \leq x < -1$ alors $-3 \leq 2x < -2$ donc $[2x] = -3$
- si $-1 \leq x < \frac{-1}{2}$ alors $-2 \leq 2x < -1$ donc $[2x] = -2$
- si $\frac{-1}{2} \leq x < 0$ alors $-1 \leq 2x < 0$ donc $[2x] = -1$
- si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ alors $0 \leq 2x < 1$ donc $[2x] = 0$
- si $\frac{1}{2} \leq x < 1$ alors $1 \leq 2x < 2$ donc $[2x] = 1$
- si $1 \leq x < \frac{3}{2}$ alors $2 \leq 2x < 3$ donc $[2x] = 2$
- si $\frac{3}{2} \leq x < 2$ alors $3 \leq 2x < 4$ donc $[2x] = 3$
- si $x = 2$ alors $2x = 4$ donc $[2x] = 4$

(c) h définie sur $[-1;1]$ par $h(x) = [3x]$

- si $-1 \leq x < \frac{-2}{3}$ alors $-3 \leq 3x < -2$ donc $[3x] = -3$
- si $\frac{-2}{3} \leq x < \frac{-1}{3}$ alors $-2 \leq 3x < -1$ donc $[3x] = -2$
- si $\frac{-1}{3} \leq x < 0$ alors $-1 \leq 3x < 0$ donc $[3x] = -1$
- si $0 \leq x < \frac{1}{3}$ alors $0 \leq 3x < 1$ donc $[3x] = 0$
- si $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ alors $1 \leq 3x < 2$ donc $[3x] = 1$
- si $\frac{2}{3} \leq x < 1$ alors $2 \leq 3x < 3$ donc $[3x] = 2$
- si $x = 1$ alors $3x = 3$ alors $[3x] = 3$

(d) i définie sur $[-4;4]$ par $i(x) = [\frac{x}{2}]$

- si $-4 \leq x < -2$ alors $-2 \leq \frac{x}{2} < -1$ donc $[\frac{x}{2}] = -2$
- si $-2 \leq x < 0$ alors $-1 \leq \frac{x}{2} < 0$ donc $[\frac{x}{2}] = -1$
- si $0 \leq x < 2$ alors $0 \leq \frac{x}{2} < 1$ donc $[\frac{x}{2}] = 0$
- si $2 \leq x < 4$ alors $1 \leq \frac{x}{2} < 2$ donc $[\frac{x}{2}] = 1$
- si $x = 4$ alors $\frac{x}{2} = 2$ donc $[\frac{x}{2}] = 2$

(e) j définie sur $[-6;6]$ par $j(x) = [\frac{x}{3}]$

- si $-6 \leq x < -3$ alors $-2 \leq \frac{x}{3} < -1$ donc $[\frac{x}{3}] = -2$
- si $-3 \leq x < 0$ alors $-1 \leq \frac{x}{3} < 0$ donc $[\frac{x}{3}] = -1$
- si $0 \leq x < 3$ alors $0 \leq \frac{x}{3} < 1$ donc $[\frac{x}{3}] = 0$
- si $3 \leq x < 6$ alors $1 \leq \frac{x}{2} < 2$ donc $[\frac{x}{3}] = 1$

- si $x = 6$ alors $\frac{x}{3} = 2$ donc $[\frac{x}{2}] = 2$

(f) k définie sur $[-2;2]$ par $k(x) = [x^2]$
L'ensemble de définition D_f est centré en 0 et $\forall x \in D_f$ $f(-x) = f(x)$ donc f est paire donc on étudie f sur $[0;2]$ et on complète la courbe en utilisant la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

- si $0 \leq x < 1$ alors $0 \leq x^2 < 1$ donc $[x^2] = 0$
- si $1 \leq x < \sqrt{2}$ alors $1 \leq x^2 < 2$ donc $[x^2] = 1$
- si $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ alors $2 \leq x^2 < 3$ donc $[x^2] = 2$
- si $\sqrt{3} \leq x < 2$ alors $3 \leq x^2 < 4$ donc $[x^2] = 3$
- si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ donc $[x^2] = 4$

(g) l définie sur $[0;9]$ par $l(x) = [\sqrt{x}]$

- si $0 \leq x < 1$ alors $0 \leq \sqrt{x} < 1$ donc $[\sqrt{x}] = 0$
- si $1 \leq x < 4$ alors $1 \leq \sqrt{x} < 2$ donc $[\sqrt{x}] = 1$
- si $4 \leq x < 9$ alors $2 \leq \sqrt{x} < 3$ donc $[\sqrt{x}] = 2$
- si $x = 9$ alors $\sqrt{x} = 3$ donc $[\sqrt{x}] = 3$

7. On voudrait déterminer puis dessiner avec précision dans un repère orthonormé l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ tels que $[x]^2 + [y]^2 = 0$
On sait que la somme de 2 réels de même signe est nulle si et seulement si chacun de ces réels est nul.
Donc $[x]^2 + [y]^2 = 0 \Leftrightarrow [x]^2 = [y]^2 = 0 \Leftrightarrow [x] = 0$ et $[y] = 0$
$\Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ et $0 \leq y < 1$

8. (a)
- si $x = 0$ alors $\frac{1}{x^2+1} = 1$ donc $\delta(x) = [\frac{1}{x^2+1}] = 1$
- si $x \neq 0$ alors $x^2 > 0$ donc $x^2 + 1 > 1$ donc $0 < \frac{1}{x^2+1} < 1$ donc $\delta(x) = [\frac{1}{x^2+1}] = 0$

(b)
- si $x = 0$ alors $\frac{x}{x^2+1} = 0$ donc $\omega(x) = [\frac{x}{x^2+1}] = 0$
- si $x > 0$ alors $x^2 - x + 1 > 0$ car $\Delta = -3 < 0$ donc $x^2 + 1 > x$ donc $0 < \frac{x}{x^2+1} < 1$ donc $\omega(x) = [\frac{x}{x^2+1}] = 0$
- si $x < 0$ alors $x^2 + x + 1 > 0$ car $\Delta = -3 < 0$ donc $x^2 + 1 > -x$ donc $0 < \frac{-x}{x^2+1} < 1$ donc $0 > \frac{x}{x^2+1} > -1$ donc $\omega(x) = [\frac{x}{x^2+1}] = -1$

(c)
- si $x = 0$ alors $s(x) = \omega(0) - \omega(0) = 0$
- si $x > 0$ alors $s(x) = \omega(x) - \omega(-x) = 0 - (-1) = 1$
- si $x < 0$ alors $s(x) = \omega(x) - \omega(-x) = -1 - 0 = -1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $xs(x) = |x|$ car
- si $x = 0$ alors $xs(x) = 0$
- si $x > 0$ alors $xs(x) = 1x = x$
- si $x < 0$ alors $s(x) = -1x = -x$