Binômes - Trinômes

Christian CYRILLE

15 novembre 2025

" La politique c'est éphémère mais une équation est éternelle."
Albert Einstein

1 Binôme

1.1 Définition

On appelle **binôme de variable réelle** x **tout polynôme du premier degré de variable** x **c'est-à-dire toute expression de la forme** $ax+b$ **où** a **est un réel non nul et** b **est un réel.**
a et b s'appellent les coefficients du binôme.

1.2 Résolution de l'équation $ax+b=0$ d'inconnue réelle x

```
si a non nul alors  x = -b/a
                  sinon si b non nul
                            alors pas de solution
                            sinon tout réel est solution
```

1.3 Théorème du signe du binôme $ax+b$ où $a \neq 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$signe\ ax+b$	$signe\ de\ -a$	0	$signe\ de\ a$

Voici codés en ALGOBOX deux algorithmes de résolution l'un avec du si .. alors ... (If ... Then ...), l'autre avec du si .. alors ...sinon (If ... Then ... Else ...)

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  SI (A != 0) ALORS
    DEBUT_SI
    X PREND_LA_VALEUR -B/A
    AFFICHER "Une seule solution X ="
    AFFICHER X
    FIN_SI
  SI (A ==0 ET B !=0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "Pas de solution"
    FIN_SI
  SI (A ==0 ET B ==0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "Tout réel est solution"
    FIN_SI
FIN_ALGORITHME
```

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  SI (A != 0) ALORS
    DEBUT_SI
    X PREND_LA_VALEUR -B/A
    AFFICHER "Une seule solution X ="
    AFFICHER X
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (A == 0 ET B != 0 ) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "Pas de solution"
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          AFFICHER "Tout réel est solution"
          FIN_SINON
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Voici codé en SCILAB l'algorithme de résolution avec du si .. alors ...sinon (If ... Then ... Else ...)

```
// Programme de résolution de l'équation ax +b = 0 en scilab
// entrée des données
a=input("entrez au clavier a = ");
b=input("entrez au clavier b = ");
// traitement et sortie
if a <>0 then
 x = -b/a;
disp(x,"la solution est x = ");
 else
if b == 0 then
 disp("tout réel est solution");
else
 disp("pas de solution");
end
 end
```

2 Trinôme

2.1 Définition

On appelle **trinôme de variable réelle x tout polynôme du second degré de variable x c'est-à-dire toute expression de la forme ax^2+bx+c où a est un réel non nul et b et c sont des réels**.
a, b et c s'appellent les coefficients du trinôme.

2.2 Résolution de $ax^2+bx+c=0$ où $a\neq 0$

1. **Modèle** 1 : $(x-\alpha)(x-\beta)=0$
   dans ce cas$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)=0$ ou $(x-\beta)=0$
   $S=\{\alpha\ ;\ \beta\}$
2. **Modèle** 2 : $ax^2+bx=0$ avec $a\neq 0$
   dans ce cas $ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0$ donc
   $S=\{0\ ;\ -\frac{b}{a}\}$
3. **Modèle** 3 : $ax^2+c=0$ avec $a\neq 0$
   dans ce cas $ax^2+c=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$ donc
   (a) si $\frac{c}{a}>0$ alors $S=\{\}=\emptyset$
   (b) si $\frac{c}{a}=0$ alors $S=\{0\}$
   (c) si $\frac{c}{a}<0$ alors $S=\left\{-\sqrt{\frac{-c}{a}}\ ;\ \sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$
4. **Modèle** 4 : $(gx+h)^2+k=0$ où $g\neq 0$
   dans ce cas $(gx+h)^2+k=0 \iff (gx+h)^2=-k$ donc
   (a) si $k>0$ alors $S=\{\}=\emptyset$
   (b) si $k=0$ alors $(gx+h)^2+k=0 \iff (gx+h)^2=0 \iff gx+h=0$ donc $S=\left\{-\frac{h}{g}\right\}$
   (c) si $k<0$ alors
   $(gx+h)^2+k=0 \iff (gx+h)^2-(\sqrt{-k})^2=0 \iff (gx+h-\sqrt{-k})(gx+h+\sqrt{-k})=0$
   $\iff gx+h-\sqrt{-k}=0$ ou $gx+h+\sqrt{-k}=0$ donc
   $S=\left\{\frac{-h-\sqrt{-k}}{g}\ ;\ \frac{-h+\sqrt{-k}}{g}\right\}$
5. **Modèle 5 : Le Cas général** $ax^2+bx+c=0$ **et sa décomposition canonique**
   $ax^2+bx+c=0 \iff a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \iff x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ car $a\neq 0$
   $\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$
   $\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ en posant $\Delta=b^2-4ac$

- ou bien $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution réelle
- ou bien $\Delta = 0$ alors l'équation a une solution double $x' = x'' = \dfrac{-b}{2a}$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')^2}$$

- ou bien $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions réelles distinctes :
  $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
  $x' + x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b}{a}$ et $x'x'' = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')}$$

car $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$
$\iff \left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$

2.3 Théorème du signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

1. Si $\Delta > 0$, on suppose $x' < x''$

x	$-\infty$	x'		x''	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*	0	*signe de −a*	0	*signe de a*

2. Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*	0	*signe de a*

3. Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*

2.4 Démarche de résolution

Lorsqu'on doit résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ d'inconnue réelle x , **il ne faut pas se précipiter sur le calcul du discriminant** Δ :

1. On vérifie d'abord que $a \neq 0$. Alors ax^2+bx+c sera bien un trinôme.
2. On vérifie que l'on n'est pas dans l'un des 4 cas suivants qui sont faciles à résoudre :
   (a) **Modèle** 1 : $(x-\alpha)(x-\beta)=0$
   (b) **Modèle** 2 : $ax^2+bx=0$ avec $a \neq 0$
   (c) **Modèle** 3 : $ax^2+c=0$ avec $a \neq 0$
   (d) **Modèle** 4 : $(gx+h)^2+k=0$ avec $g \neq 0$
3. Sinon on observe a et c :
   s'ils sont de signes contraires alors $ac<0$ donc $\Delta=b^2-4ac>0$ donc on est sûr que l'équation a 2 solutions distinctes x' et x''
   (a) On cherche une solution évidente parmi $\cdots -3,-2,-1,1,2,3,\cdots$ ou une solution évidente en fonction du contexte.
   Si l'on trouve x', on obtient x'' soit en utilisant le fait que le produit $\mathrm{P}=x'x''=\dfrac{c}{a}$
   ou que la somme des racines $\mathrm{S}=x'+x''=\dfrac{-b}{a}$
   (b) Si l'on ne trouve pas de solution évidente , on calcule alors Δ

2.5 Signe des racines éventuelles

Comment déterminer le signe des racines d'un trinôme lorsqu'elles existent ?

```
On cherche d'abord le signe de leur produit P = c/a
Si P < 0 alors les racines sont de signes contraires
        sinon elles ont toutes deux le signe de leur somme S = -b/a
```

2.6 Algorithme de résolution en ALGOBOX

```
VARIABLES
  X1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  X2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  X0 EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  DELTA EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  DELTA PREND_LA_VALEUR b*b - 4*a*c
  SI (DELTA > 0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "Deux solutions X1 et X2"
    X1 PREND_LA_VALEUR (-b + sqrt(DELTA))/(2*a)
    X2 PREND_LA_VALEUR (-b -sqrt(DELTA))/(2*a)
    AFFICHER X1
    AFFICHER X2
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (DELTA <0) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "Pas de solutions"
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          AFFICHER "Une seule solution"
          X0 PREND_LA_VALEUR -b/(2*a)
          AFFICHER X0
          FIN_SINON
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

2.7 Algorithme de résolution en SCILAB

```
// programme de résolution de l'équation ax^2 + bx +c = 0
 // entrée des données
  a=input("entrez au clavier a = ");
  b=input("entrez au clavier b = ");
  c=input("entrez au clavier c = ");
//traitement
delta=b*b-4*a*c;
  if delta < 0 then
disp("pas de solution");
   else
if delta == 0 then
   x=-b/(2*a);
    disp (x,"une solution double x = ");
else
    x1 = (-b-sqrt(delta))/(2*a);
    x2 = (-b+sqrt(delta))/(2*a);
    disp ("la première solution est "+ string (x1));
    disp ("la deuxième solution est "+ string (x2));
end
    end
```

3 Applications du second degré

3.1 Recherche de nombres connaissant leur somme S et leur produit P

3.1.1 Théorème

Rechercher deux nombres α et β connaissant leur somme S et leur produit P équivaut à rechercher les solutions éventuelles α et β de l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - SX + P = 0$$

3.1.2 démonstration

α et β existent $\Longleftrightarrow$ α et β sont solutions de $(X-\alpha)(X-\beta)=0$
$\Longleftrightarrow$ α et β sont solutions de $X^2-\beta X-\alpha X+\alpha\beta=0$
$\Longleftrightarrow$ α et β sont solutions de $X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta=0$
$\Longleftrightarrow$ α et β sont solutions de $X^2-SX+P=0$

3.2 Equations bicarrées

3.2.1 Théorème

Résoudre l'équation $Ax^4+Bx^2+C=0$ où $A\neq 0$ équivaut à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} X = x^2 \\ AX^2+BX+C=0 \end{cases}$$

3.2.2 Exemples

Exemple 1 :

$$x^4+x^2+1=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2+X+1=0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{\,\}=\emptyset}$$

Exemple 2 :

$$x^4-2x^2-3=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2-2X-3=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X=-1 \; ou \; X=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ x^2=-1 \; ou \; x^2=3 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}}$$

Exemple 3 :

$$x^4-7x^2+6=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2-7X+6=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X=1 \; ou \; X=6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ x^2=1 \; ou \; x^2=6 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{-\sqrt{6}\,;\,-1\,;\,1\,;\,\sqrt{6}\}}$$

3.3 Position d'un nombre par rapport aux racines éventuelles

Soit le trinôme $\mathrm{T}(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. **ou bien** $a\,\mathrm{T}(x_0) < 0$
   D'après le théorème sur le signe d'un trinôme, $\mathrm{T}(x)$ admet forcément deux racines distinctes x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
   Alors et $x_0 \in]x_1\ ;\ x_2[$
2. **ou bien** $a\,\mathrm{T}(x_0) = 0$
   Alors $\mathrm{T}(x_0) = 0$ puisque $a \neq 0$ donc x_0 est l'une des racines de $\mathrm{T}(x)$
3. **ou bien** $a\,\mathrm{T}(x_0) > 0$
   Si de plus $\Delta > 0$
   Alors $\mathrm{T}(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
   Comme la demi-somme de ces racines est $\dfrac{-b}{2a}$ on a donc :
   - ou bien $x_0 < \dfrac{-b}{2a}$ alors $x_0 \in]-\infty\ ;\ x_1[$
   - ou bien $x_0 > \dfrac{-b}{2a}$ alors $x_0 \in]x_2\ ;\ +\infty[$

3.4 Trinômes ayant les mêmes racines

Soient 2 trinômes $\mathrm{T}_1(x) = ax^2 + bx + c$ où où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
et $\mathrm{T}_2(x) = a'x^2 + b'x + c'$ où $(a',b',c') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Alors

$$\mathrm{T}_1(x) \text{ et } \mathrm{T}_2(x) \text{ ont les mêmes racines}$$

$\Longleftrightarrow$ l'un d'entre eux a des racines et leurs coefficients respectifs sont proportionnels

3.4.1 Démonstration

- $\Longrightarrow$: Supposons que $\mathrm{T}_1(x)$ a des racines x_1 et x_2 et que $\mathrm{T}_2(x)$ aient les mêmes racines alors $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{b'}{a'} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'} \end{cases}$
  Par conséquent, $b' = \dfrac{a'}{a}b$ et $c' = \dfrac{a'}{a}c$. Or $a' = \dfrac{a'}{a}a$ donc les coefficients respectifs sont proportionnels.
- $\Longleftarrow$: Supposons que $\mathrm{T}_1(x)$ a des racines x_1 et x_2 et que leurs coefficients respectifs sont proportionnels donc $\exists\lambda \in \mathbb{R} \quad \mathrm{T}_2(x) = \lambda\mathrm{T}_1(x)$.
  Or $\mathrm{T}_1(x_1) = 0$ et $\mathrm{T}_1(x_2) = 0$ donc $\mathrm{T}_2(x_1) = 0$ et $\mathrm{T}_2(x_2) = 0$

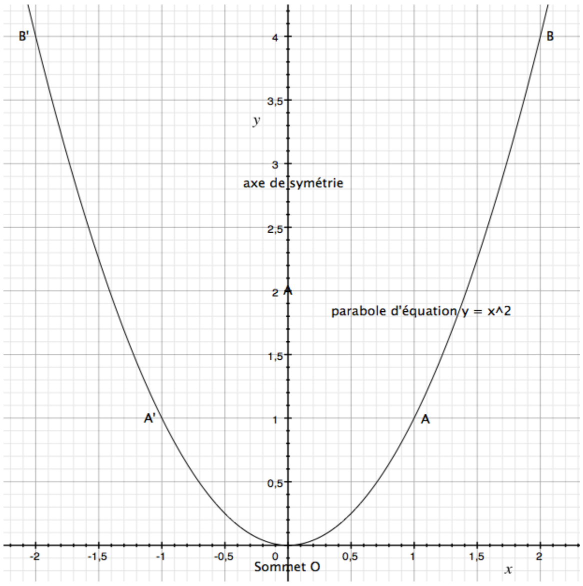
3.5 Corollaire

L'ensemble des trinômes admettant x_1 et x_2 comme racines est l'ensemble des trinômes de la forme $\lambda(x - x_1)(x - x_2)$

4 Construction de la parabole d'équation $y = x^2$

La parabole d'équation $y = x^2$ peut être tracée à partir de 5 points dans un repère $\mathscr{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$

1. le point $O(0;0)$: c'est le sommet de la parabole
2. le point $A(1;1)$: on avance horizontalement de 1 à partir du sommet et l'on monte verticalement de 1
3. le point $B(2;4)$: on avance horizontalement de 2 à partir du sommet et l'on monte verticalement de 4
4. le point $A'(-1;1)$: on recule horizontalement de 1 à partir du sommet et l'on monte verticalement de 1
5. le point $B'(-2;4)$: on recule horizontalement de 2 à partir du sommet et l'on monte verticalement de 4



5 Construction de la parabole d'équation $y = ax^2$

La parabole d'équation $y = ax^2$ peut être tracée à partir de 5 points dans un repère $\mathscr{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$

1. le point $O(0;0)$: c'est le sommet de la parabole
2. le point $A(1;a)$: on avance horizontalement de 1 à partir du sommet et l'on monte verticalement de a si $a > 0$ sinon on descend de a
3. le point $B(2;4a)$: on avance horizontalement de 2 à partir du sommet et l'on monte verticalement de $4a$ si $a > 0$ sinon on descend de $4a$
4. le point $A'(-1;a)$: on recule horizontalement de 1 à partir du sommet et l'on monte verticalement de a si $a > 0$ sinon on descend de a
5. le point $B'(-2;4a)$: on recule horizontalement de 2 à partir du sommet et l'on monte verticalement de $4a$ si $a > 0$ sinon on descend de $4a$

6 Construction de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$

Soit la fonction trinôme $T : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

1. On utilise la décomposition canonique $T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$
2. **La courbe représentative de f est une parabole : - d'axe de symétrie la droite** (D) : $y = -\frac{b}{2a}$ **et de - de sommet** $S(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$
3. $\mathscr{P}$ a pour équation $Y = aX^2$ dans le repère $\mathscr{R}' = (S; \vec{i}, \vec{j})$

On peut alors tracer $\mathscr{P}$ à partir de 5 points

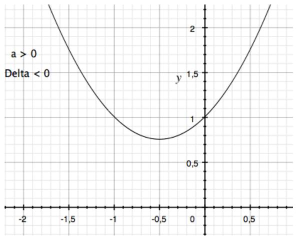
1. le point $S(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$: c'est le sommet de la parabole
2. le point $A(1;a)$: on avance horizontalement de 1 à partir du sommet S et l'on monte verticalement de a si $a > 0$ sinon on descend de a
3. le point $B(2;4a)$: on avance horizontalement de 2 à partir du sommet S et l'on monte verticalement de $4a$ si $a > 0$ sinon on descend de $4a$
4. le point $A'(-1;a)$: on recule horizontalement de 1 à partir du sommet S et l'on monte verticalement de a si $a > 0$ sinon on descend de a
5. le point $B'(-2;4a)$: on recule horizontalement de 2 à partir du sommet S et l'on monte verticalement de $4a$ si $a > 0$ sinon on descend de $4a$

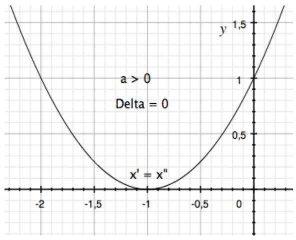
Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

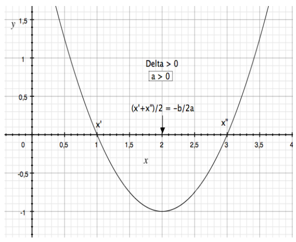
1. f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2ax + b$
3. 3 cas

   (a) $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

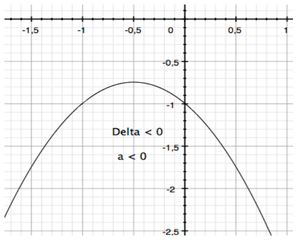


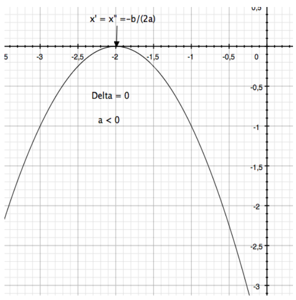


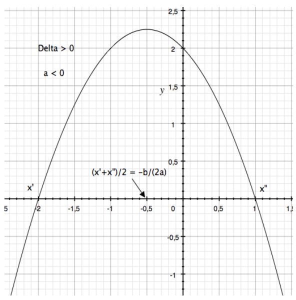


4. $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$







7 Exercices

7.1 QCM 1

Questions	Réponses
1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x+3)^2$ est égal à	☐ x^2+9 ☐ x^2+4x+6 ☐ x^2+6x+9
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x+1)^2+(x-1)^2$ est égal à	☐ $2x^2+2$ ☐ $2(x^2-7x+3$ ☐ $2x^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (2x-1)(x-3)$ est égal à	☐ $2x^2+3$ ☐ $2x^2-7x+3$ ☐ $3x-4$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (5-x)(x+5)$ est égal à	☐ $(5-x)^2$ ☐ x^2-25 ☐ $25-x^2$
5. l'équation $x^2-3=0$ admet	☐ une seule solution ☐ deux solutions distinctes ☐ une infinité de solutions
6. Une solution de l'équation $x^2-3x=0$ d'inconnue réelle x est :	☐ 3 ☐ -3 ☐ $\sqrt{3}$
7. Une solution de l'équation $x^2+110x-111=0$ d'inconnue réelle x est :	☐ 110 ☐ 111 ☐ 1
8. Le trinôme x^2+x-2 admet	☐ deux racines positives ☐ deux racines négatives ☐ 2 racines de signes opposés

Questions	**Réponses**
1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x+3)^2$ est égal à	☐ x^2+9 ☐ x^2+4x+6 ■ x^2+6x+9
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x+1)^2+(x-1)^2$ est égal à	■ $2x^2+2$ ☐ $2(x^2-7x+3$ ☐ $2x^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (2x-1)(x-3)$ est égal à	☐ $2x^2+3$ ■ $2x^2-7x+3$ ☐ $3x-4$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (5-x)(x+5)$ est égal à	☐ $(5-x)^2$ ☐ x^2-25 ■ $25-x^2$
5. l'équation $x^2-3=0$ admet	☐ une seule solution ■ deux solutions distinctes ☐ une infinité de solutions
6. Une solution de l'équation $x^2-3x=0$ d'inconnue réelle x est :	■ 3 ☐ -3 ☐ $\sqrt{3}$
7. Une solution de l'équation $x^2+110x-111=0$ d'inconnue réelle x est :	☐ 110 ☐ 111 ■ 1
8. Le trinôme x^2+x-2 admet	☐ deux racines positives ☐ deux racines négatives ■ deux racines de signes opposés

7.2 QCM 2

Questions	Réponses
1. L'équation $(x+4)^2 = (x+3)^2$ d'inconnue réelle x	☐ admet une seule solution ☐ admet deux solutions ☐ n'admet pas de solutions
2. Un trinôme admettant 17 et 152 comme racines est	☐ $x^2 - 1030x + 2584$ ☐ $x^2 - 169x + 2584$ ☐ $x^2 + 169x - 2584$
3. La forme canonique du trinôme $2x^2 + 4x + 5$ est	☐ $(2x+1)^2 + 5$ ☐ $2[(x+1)^2 + \frac{3}{2}]$ ☐ $[\sqrt{2}x + 1]^2 + 4$
4. L'équation $(x^2 + x + 1$ d'inconnue réelle x	☐ admet deux racines égales ☐ n'admet pas de racines ☐ nadmet deux racines du type α et $\frac{1}{\alpha}$
5. L'équation $x^2 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}x - 1 = 0$ d'inconnue réelle x	☐ n'admet pas de racines ☐ admet une racine double ☐ admet deux racines distinctes
6. L'équation $7x^2 + 100000x + 7 = 0$ d'inconnue réelle x	☐ n'admet pas de racines ☐ admet deux racines distinctes négatives ☐ admet deux racines distinctes positives et inverses l'une de l'autre
7. Dire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c > 0$	☐ équivaut à dire que le discriminant $\Delta = 0$ et $a > 0$ ☐ équivaut à dire que le discriminant $\Delta < 0$ et $a > 0$ ☐ équivaut à dire que le discriminant $\Delta > 0$ et $a > 0$

Questions	Réponses
1. L'équation $(x+4)^2=(x+3)^2$ d'inconnue réelle x	■ admet une seule solution ☐ admet deux solutions ☐ n'admet pas de solutions
2. Un trinôme admettant 17 et 152 comme racines est	☐ $x^2-1030x+2584$ ■ $x^2-169x+2584$ ☐ $x^2+169x-2584$
3. La forme canonique du trinôme $2x^2+4x+5$ est	☐ $(2x+1)^2+5$ ■ $2[(x+1)^2+\frac{3}{2}]$ ☐ $[\sqrt{2}x+1]^2+4$
4. L'équation $(x^2+x+1$ d'inconnue réelle x	☐ admet deux racines égales ■ n'admet pas de racines ☐ nadmet deux racines du type α et $\frac{1}{\alpha}$
5. L'équation $x^2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}x-1=0$ d'inconnue réelle x	☐ n'admet pas de racines ☐ admet une racine double ■ admet deux racines distinctes
6. L'équation $7x^2+100000x+7=0$ d'inconnue réelle x	☐ n'admet pas de racines ☐ admet deux racines distinctes négatives ■ admet deux racines distinctes positives et inverses l'une de l'autre
7. Dire que $\forall x\in\mathbb{R} \quad ax^2+bx+c>0$	☐ équivaut à dire que le discriminant $\Delta=0$ et $a>0$ ■ équivaut à dire que le discriminant $\Delta<0$ et $a>0$ ☐ équivaut à dire que le discriminant $\Delta>0$ et $a>0$

7.3 Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f définie par
$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ puis simplifier $f(x)$

- $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $N(x)=x^2-3x+2i$ et $D(x)=x^2-4x+3$
- Etudions le trinôme $N(x)$
  - $N(x)$ a pour racine évidente $x'=1$
  - Comme le produit des racines de $N(x)$ est $x'x"=\dfrac{2}{1}$ donc $x"=2$
  - Alors $N(x)=(x-1)(x-2)$
- Etudions le trinôme $D(x)$
  - $D(x)$ a pour racine évidente $x'=1$
  - Comme le produit des racines de $D(x)$ est $x'x"=\dfrac{3}{1}=3$ donc $x"=3$
  - Alors $D(x)=(x-1)(x-3)$
- On en déduit que $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$
- Comme $N(x)$ et $D(x)$ existent pour tout réel x alors $f(x)$ existe à condition que $D(x)\neq 0$. On en déduit que l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}-\{1\ ;\ 3\}$
- Alors

$$\boxed{\forall x\in\mathscr{D}_f \qquad f(x)=\frac{x-2}{x-3}}$$

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f définie par
$f(x)=\dfrac{x^2+(1+\pi)x+\pi}{3x^2+3(\pi-4)x-12\pi}$ puis simplifier $f(x)$

- $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $N(x)=x^2+(1+\pi)x+\pi$ et $D(x)=3x^2+3(\pi-4)x-12\pi$
- Etudions le trinôme $N(x)$
  - $N(x)$ a pour racine évidente $x'=-\pi$
  - Comme le produit des racines de $N(x)$ est $x'x"=\dfrac{\pi}{1}$ donc $-\pi x"=\pi$ donc $x"=-1$
  - Alors $N(x)=1[(x+\pi)(x+1)]$
- Etudions le trinôme $D(x)$
  - $D(x)$ a pour racine évidente $x'=-\pi$
  - Comme le produit des racines de $D(x)$ est $x'x"=\dfrac{-12\pi}{3}$ donc $-\pi x"=-4\pi$ donc $x"=4$
  - Alors $D(x)=3(x+\pi)(x-41)$
- On en déduit que $f(x)=\dfrac{1[(x+\pi)(x+1)]}{3(x+\pi)(x-4)}$
- Comme $N(x)$ et $D(x)$ existent pour tout réel x alors $f(x)$ existe à condition que $D(x)\neq 0$. On en déduit que l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}-\{-\pi\ ;\ 4\}$
- Alors

$$\boxed{\forall x\in\mathscr{D}_f \qquad f(x)=\frac{x+1}{3(x-4)}}$$

7.4 Résolution d'inéquations

1. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue réelle x :
   $(x^2-2x-3)(x^2+2x+2)<0$
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par
   $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-9x+14}}$

1. Soit l'inéquation suivante d'inconnue réelle x :

$$\text{(I)}:\qquad (x^2-2x-3)(x^2+2x+2)<0$$

- Les deux trinômes étant définis pour tout réel x alors l'ensemble de définition de (I) est $\mathbb{R}$.
- Déterminons les racines éventuelles du trinôme x^2-2x-3
  - $x'=-1$ est une racine évidente.
  - Par conséquent, il existe une autre racine $x"$ vérifiant $x'x"=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-3}{1}=-3$.
    donc $x"=3$
  -

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

- - Le trinôme x^2+2x+2 n'a pas de racines réelles
    car son discriminant $\Delta=b^2-4ac=2^2-4(1)(2)=4-8=-4<0$
  - Donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2+2x+2>0$ car il a le signe de $a=1$
-

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+2x+2		$+$		$+$		$+$	
$(x^2-2x-3)(x^2+2x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de I est

$$\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[}$$

2. Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-9x+14}}$$

- $f(x) = \sqrt{\mathrm{R}(x)}$ où $\mathrm{R}(x)$ est une fraction rationnelle c'est-à-dire le quotient de deux polynômes $\mathrm{N}(x) = x^2-5x+4$ et $\mathrm{D}(x) = x^2-9x+14$
- $f(x)$ existe lorsque $\mathrm{R}(x)$ existe et $\mathrm{R}(x) \geq 0$ c'est-à-dire $\mathrm{N}(x)$ existe et $\mathrm{D}(x)$ existe et $\mathrm{D}(x) \neq 0$ et $\mathrm{R}(x) \geq 0$
- Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{N}(x)$ et $\mathrm{D}(x)$ existent alors $\mathscr{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2-9x+14 \neq 0 \text{ et } \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-9x+14} \geq 0 \right\}$
- ◇ x^2-5x+4 a pour racine évidente $x' = 1$ donc comme $x'x" = \dfrac{4}{1}$ alors $x" = 4$

  ◇ $x^2-9x+14$ a pour racine évidente $x' = 2$ donc comme $x'x" = \dfrac{14}{1}$ alors $x" = 7$

  ◇

x	$-\infty$		1		2		4		7	$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x^2-9x+14$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-9x+14}$		$+$	0	$-$	//	$+$	0	$-$	//	$+$

- Par conséquent, l'ensemble des solutions de cette inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,1 \cup]2\,;\,4] \cup]7\,;\,+\infty[}$$

7.5 Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $ax^2 - (a^2+3)x + 3a = 0$ où a est un paramètre réel
2. $(x^2+x)^2 + 2(x^2+x) - 8 = 0$
3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

1. Soit l'équation (E) : $ax^2 - (a^2+3)x + 3a = 0$ où a est un paramètre réel.
   Le polynôme $\mathrm{P}(x) = ax^2 - (a^2+3)x + 3a$ a un degré qui dépend du paramètre a.
   - ou bien $a = 0$
     Alors $\mathrm{P}(x) = -3x$ est de degré 1 et (E) $\iff -3x = 0 \iff x = 0$
     Donc
     $$\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$$
   - ou bien $a \neq 0$
     alors $\mathrm{P}(x)$ est de degré 2.
     - $x' = a$ est une racine évidente.
     - Alors $\mathrm{P}(x)$ a une autre racine $x"$ vérifiant $x'x" = \dfrac{3a}{a} = 3$
       donc $ax" = 3$ d'où $x" = \dfrac{3}{a}$
     - Donc (E) $\iff x = a$ ou $x = \dfrac{3}{a}$
     - Alors
     $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{a\,;\,\frac{3}{a}\right\}}$$
2. Soit l'équation (E) : $(x^2+x)^2 + 2(x^2+x) - 8 = 0$.
   Le polynôme $\mathrm{P}(x) = (x^2+x)^2 + 2(x^2+x) - 8$ est de degré 4.
   - $\forall x \in \mathbb{R}$ (E) $\iff \begin{cases} \mathrm{X} = x^2 + x \\ \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X} = x^2 + x \\ \mathrm{X} = 2 \text{ ou } \mathrm{X} = -4 \end{cases}$
     $\iff x^2 + x = 2$ ou $x^2 + x = -4 \iff x^2 + x - 2 = 0$ ou $x^2 + x + 4 = 0$
   - Le trinôme $x^2 + x - 2$ a pour racine évidente $x' = 1$ donc l'autre racine est $x" = -2$
   - Le trinôme $x^2 + x + 4$ n'a pas de racines réelles car son discriminant $\Delta = -3 < 0$
   - Donc
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{-2\,;\,1\}}$$
3. Soit l'équation bicarrée (E) : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
   - $\forall x \in \mathbb{R}$ (E) $\iff \begin{cases} \mathrm{X} = x^2 \\ \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X} = x^2 \\ \mathrm{X} = 1 \text{ ou } \mathrm{X} = 4 \end{cases}$
     $\iff x^2 = 1$ ou $x^2 = 4 \iff x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$
   - Donc
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\}}$$

7.6 Somme des n premiers entiers non nuls

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, la somme suivante :
$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ par la méthode suivante utilisant des polynômes

1. Déterminer un polynôme de degré 2, $P(x)$ tel que pour tout réel x , l'on a $P(x+1) - P(x) = x$
2. En déduire la valeur de S_1.

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
   Alors $\forall x \in \mathbb{R}$
   $P(x+1) - P(x) = x \iff a(x+1)^2 + b(x+1) + c - [ax^2 + bx + c] = x$
   $\iff a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c] = x$
   $\iff ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - ax^2 - bx - c = x \iff 2x + a + b = x$
   $\iff \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ par identification des coefficients des monômes respectifs
   $\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$
   Par conséquent,
   $$\boxed{P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c \text{ où } c \in \mathbb{R}}$$
2. On décilne la formule $P(x+1) - P(x) = x$ pour les entiers $n, n-1, n-2, \cdots 4, 3, 2, 1$ puis on fait une sommation télescopique.

$P(n+1)$	$-$	$P(n)$	$=$	n
$P(n)$	$-$	$P(n-1)$	$=$	$n-1$
$P(n-1)$	$-$	$P(n-2)$	$=$	$n-2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$=$	$\cdots$
$P(4)$	$-$	$P(3)$	$=$	$n-2$
$P(3)$	$-$	$P(2)$	$=$	2
$P(2)$	$-$	$P(1)$	$=$	1
$P(n+1)$	$-$	$P(1)$	$=$	$1+2+3+\cdots+n = S_1$

Donc $S_1 = P(n+1) - P(1) = \dfrac{1}{2}(n+1)^2 - \dfrac{1}{2}(n+1) + c - c$
$S_1 = \dfrac{1}{2}(n+1)[(n+1) - 1] = \dfrac{n(n+1)}{2}$
On a donc
$$\boxed{S_1 = 1+2+3+\cdots+(n-2)(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

C'est la fameuse formule de Karl Friedrich GAUSS

7.7 Résolution équation

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x et de paramètres $a \neq 0$ et $b \neq 0$:

$$\text{(E) :} \qquad \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$$

- L'ensemble de définition de (E) est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$
- $x = b$ est une solution évidente de cette équation. Y en a-t-il d'autres ?
- $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \text{(E)} \iff \dfrac{x^2 + a^2}{ax} = \dfrac{b^2 + a^2}{ab} \iff ab(x^2 + a^2) = (b^2 + a^2)ax$
  $\iff abx^2 - (b^2 + a^2)ax + ba^3 = 0 \iff a[bx^2 - (b^2 + a^2)x + ba^2] = 0$
  $\iff bx^2 - (b^2 + a^2)x + ba^2 = 0$ car $a \neq 0$.
  Comme $b \neq 0$ alors $x' = b$ est un trinôme dont une racine évidente est $x = b$.
  Donc l'autre solution est $x"$ telle que $x'x" = \dfrac{ba^2}{b} = a^2$ donc $bx" = a^2$ d'où $x" = \dfrac{a^2}{b}$
- L'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ b\,;\, \frac{a^2}{b} \right\}}$$

7.8 Equation de degré 6

1. Démontrer que pour tout réel a, l'équation $x^3 = a$ admet une solution unique que l'on appelle racine cubique de a
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$x^6 - 35x^3 + 216 = 0$$

7.9 Arithmétique

Soit N un nombre de 2 chiffres. La somme des chiffres de N est 13. En ajoutant 34 à leur produit , on obtient un nombre dont les chiffres sont ceux de N dans l'ordre inverse. Trouver N.

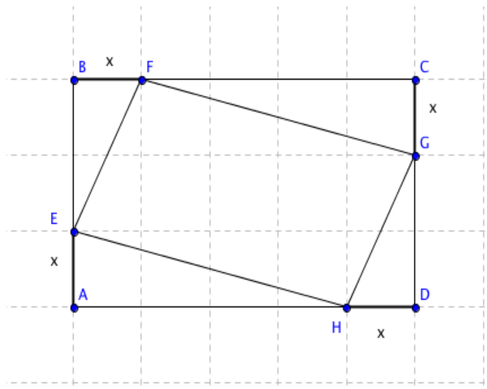
7.10 Maximum d'une aire

Un agriculteur utilise 2000 m de clôture pour entourer un enclos de forme rectangulaire. On donne x et y les dimensions de l'enclos.

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Ecrire l'aire A de cet enclos en fonction de x.
3. Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 1000x$. Tracer la courbe représentative de cette fonction pour $x \in [0; 1000]$
4. Montrer que cette fonction admet un maximum que l'on déterminera.
5. En déduire les dimensions de l'enclos pour que l'aire soit maximale.

7.11 Aires

On considère un rectangle ABCD dont les dimensions sont AB = $a > 0$ et BC = $b > 0$. On dessine à l'intérieur un parallélogramme EFGH comme indiqué sur la figure.



1. Déterminer en fonction de a, de b et de x l'aire A(x) du parallélogramme.
2. Déterminer x en fonction de a et de b pour que l'aire du parallélogramme soit égale à la moitié de l'aire du rectangle.
3. On choisit dans cette question $a = 6\ cm$ et $b = 8\ cm$.
   (a) Ecrire A(x). Préciser les valeurs que peut prendre x.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on A(x) $= 24\ cm^2$?
   (c) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on A(x) $= 36\ cm^2$?
   (d) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on A(x) $= 23{,}5\ cm^2$?

   On fera une figure dans chaque cas.
4. On choisit dans cette question $a = 8\ cm$ et $b = 8\ cm$.
   (a) Ecrire A(x). Préciser les valeurs que peut prendre x.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on A(x) $= 50\ cm^2$?
   (c) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on A(x) $= 32\ cm^2$?

   On fera une figure dans chaque cas.

7.12 Systèmes à 2 inconnues

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. $\begin{cases} x+y=7 \\ x\,y=12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{-26}{5} \\ x\,y=-1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x\,y=6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^3+y^3=98 \\ x\,y=-15 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x+y=31 \\ x^3+y^3=8029 \end{cases}$

7.12.1 Corrigés

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
   $\begin{cases} x+y=7 \\ x\,y=12 \end{cases} \iff x$ et y sont solutions de l'équation $\mathrm{X}^2-7\mathrm{X}+12=0$
   $\iff (x, y)=(3\,;\,4)$ ou $(x, y)=(4,3)$
   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{(3\,;\,4)\,;\,(3\,;\,4)\}}$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$
   $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{-26}{5} \\ x\,y=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{y-x}{xy}=\dfrac{-26}{5} \\ x\,(-y)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=\dfrac{-26}{5} \\ (-x)\,y=1 \end{cases}$
   $\iff x$ et $-\,y$ sont solutions de l'équation $\mathrm{X}^2+\dfrac{26}{5}\mathrm{X}+1=0$
   $\iff x$ et $-\,y$ sont solutions de l'équation $5\mathrm{X}^2+26\mathrm{X}+5=0$
   $\iff (x,-y)=(-\dfrac{1}{5}\,;\,-5)$ ou $(x, y)=(-5\,;\,-\dfrac{1}{5})$
   $\iff (x, y)=(-\dfrac{1}{5}\,;\,5)$ ou $(x, y)=(-5\,;\,\dfrac{1}{5})$
   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\left(-\dfrac{1}{5}\,;\,5\right)\,;\,\left(-5\,;\,\dfrac{1}{5}\right)\right\}}$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
   $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x\,y=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2\,y^2=36 \end{cases}$
   $\iff x^2$ et y^2 sont solutions de l'équation $\mathrm{X}^2-13\mathrm{X}+36=0$
   $\iff (x^2, y^2)=(4\,;\,9)$ ou $(x^2, y^2)=(9\,;\,4)$
   $\iff (x, y)=(2\,;\,3)$ ou $(x, y)=(2\,;\,-3)$ ou $(x, y)=(-2\,;\,3)$ ou $(x, y)=(-2\,;\,-3)$ ou $(x, y)=(3\,;\,2)$ ou $(x, y)=(3\,;\,-2)$ ou $(x, y)=(-3\,;\,2)$ ou $(x, y)=(-3\,;\,-2)$
   Pour l'instant, on a uniquement :
   $\mathscr{S} \subset \{(2\,;\,3)\,;\,(2\,;\,-3)\,;\,(-2\,;\,3)\,;\,(-2\,;\,-3)\,;\,(3\,;\,2)\,;\,(3\,;\,-2)\,;\,(-3\,;\,2)\,;\,(-3\,;\,-2)\}$
   Donc l'ensemble des solutions est inclus dans cet ensemble de 8 couples. mais il faut que le produit $xy=6$ donc on ne peut retenir que 4 couples Donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S}=\{(2\,;\,3)\,;\,(-2\,;\,-3)\,;\,(3\,;\,2)\,;\,\,(-3\,;\,-2)\}}$$

4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
$\left\{\begin{array}{l} x^3+y^3=98 \\ x\,y=-15 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^3+y^3=98 \\ x^3\,y^3=-3375 \end{array}\right. \iff x^3$ et y^3 sont solutions de l'équation $X^2-98X-3375=0$
$\iff (x^3, y^3)=(125\;;\;-27)$ ou $(x^3, y^3)=(-27\;;\;125)$
$\iff (x, y)=(5\,;\,-3)$ ou $(x, y)=(-3\,;\,5)$ •• Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{(-3\;;\;5)\;;\;(5\;;\;-3)\}}$

5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
$\left\{\begin{array}{l} x+y=31 \\ x^3+y^3=8029 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=31 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=8029 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=31 \\ x^2-xy+y^2=259 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y=31 \\ (x+y)^2=961 \\ x^2-xy+y^2=259 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=31 \\ x^2+2xy+y^2=961 \\ x^2-xy+y^2=259 \end{array}\right.$
$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=31 \\ 3xy=702 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=31 \\ xy=234 \end{array}\right.$
$\Longrightarrow x$ et y sont solutions de l'équation $X^2-31X+234=0$
$\Longrightarrow (x, y)=(13, 18)$ ou $(x, y)=(18, 13)$
Par conséquent $\mathscr{S} \subset \{(13, 18); (18, 13)\}$
On vérifie aisément que $\{(13, 18); (18, 13)\} \subset \mathscr{S}$
Donc $\boxed{\mathscr{S}=\{(13, 18); (18, 13)\}}$

7.13 Equation en ln et exp

1. Résoudre l'équation suivante $x^2-4x-5=0$ d'inconnue réelle x
2. En déduire les solutions des équations suivantes :
   (a) $(ln(x))^2-4\ ln(x)-5=0$
   (b) $ln(x-3)+ln(x-1)=3\ ln(2)$
   (c) $e^x-4=5e^{-x}$

1. l'équation $x^2-4x-5=0$ d'inconnue réelle x est une équation de degré 2 qui admet au maximum 2 solutions. Or $x'=-1$ est une solution évidente. Donc il y a une autre solution $x"$ qui vérifie la formule suivant $x'x"=\dfrac{c}{a}$ si l'équation a la forme $ax^2+bx+c=0$
   Par conséquent, $-x"=\dfrac{-5}{1}$ donc $x"=5$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\boxed{\mathscr{S}=\{-1;5\}}$
2. (a) Soit l'équation $(ln(x))^2-4\ ln(x)_5=0$
   - Son ensemble de définition est $\mathscr{D}=\{x/x>0\}=]0;+\infty[$
   - $\forall x\in\mathscr{D}\quad (ln(x))^2-4ln(x)-5=0 \iff \begin{cases} X=ln(x)\\ X^2-4X-5=0\end{cases}$
     $\iff \begin{cases} X=ln(x)\\ X=-1 \text{ ou } X=5\end{cases} \iff ln(x)=-1$ ou $ln(x)=5 \iff exp(ln(x))=exp(-1)$ ou $exp(ln(x$
     $exp(5)$
     $\iff x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ ou $x=e^5$
   - Par conséquent, comme les solutions sont dans l'ensemble de définition alors $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{e}\ ;\ e^5\right\}}$

   (b) Soit l'équation $ln(x-3)+ln(x-1)=3\ ln(2)$
   - Son ensemble de définition est :
     $\mathscr{D}=\{x/x-3>0 \text{ et } x-1>0\}=\{x/x>3 \text{ et } x>1\}=]3;+\infty[$
   - $\forall x\in\mathscr{D}\quad ln(x-3)+ln(x-1)=3ln(2)$
     $\iff ln((x-3)(x-1))=ln(2^3) \iff ln(x^2-4x+3)=ln(8)$
     $\iff x^2-4x+3=8$ car ln est bijective
     $\iff x^2-4x-5=0 \iff x=-1$ ou $x=5$
   - Par conséquent, comme seule la solution $5\in\mathscr{D}$ alors $\mathscr{S}=\{5\}$

   (c) Soit l'équation $e^x-4=5e^{-x}$
   - Son ensemble de définition est $\mathscr{D}=\mathbb{R}$
   - $\forall x\in\mathscr{D}\quad e^x-4=5e^{-x} \iff e^x-4=\dfrac{5}{e^x} \iff e^xe^x-4e^x=5$ car $e^x>0 \iff$
     $(e^x)^2-4e^x-5=0 \iff \begin{cases} X=e^x\\ X^2-4X-5=0\end{cases}$
     $\iff \begin{cases} X=e^x\\ X=-1 \text{ ou } X=5\end{cases}$
     $\iff e^x=-1$ ou $e^x=5 \iff ln(e^x)=ln(5) \iff x=ln(5)$ car l'équation $e^x=-1$ n'a pas de solution puisque $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^x>0$
   - Par conséquent, comme la solutions est dans l'ensemble de définition alors $\boxed{\mathscr{S}=\{ln(5)\}}$

7.14 Inéquation en exp

1. Déterminer les racines réelles du polynôme

$$P(x) = 2x^2 + 9x - 5$$

2. En déduire une factorisation de $P(x)$
3. Etudier le signe des expressions $e^x + 5$ et $2e^x - 1$
4. En déduire la résolution de l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2e^{2x} + 9e^x - 5 > 0$$

1. Le trinôme $P(x) = 2x^2 + 9x - 5$ a pour discriminant :
   $\Delta = 9^2 - 4(2)(-5) = 81 + 40 = 121 = 11^2 > 0$.
   Par conséquent, $P(x)$ a deux racines réelles

$$x' = \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x'' = \frac{-9-11}{4} = -5$$

2. On en déduit la factorisation de $P(x) = 2(x+5)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
3. • $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x + 5 > 0$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ et $5 < 0$
   • ◇ $2e^x - 1 = 0 \iff 2e^x = 1 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = ln\left(\frac{1}{2}\right)$ car ln est bijective.
     ◇ $2e^x - 1 > 0 \iff 2e^x > 1 \iff e^x > \frac{1}{2} \iff x > ln\left(\frac{1}{2}\right)$ car ln est strictement croissante.
     ◇ $2e^x - 1 < 0 \iff 2e^x < 1 \iff e^x < \frac{1}{2} \iff x < ln\left(\frac{1}{2}\right)$ car ln est strictement croissante.
4. Soit l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(I) : \qquad 2e^{2x} + 9e^x - 5 > 0$$

   • L'ensemble de définition de cette inéquation est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
   • $\forall x \in \mathbb{R} \quad (I) \iff \begin{cases} X = e^x \\ 2X^2 + 9X - 5 > 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} X = e^x \\ 2X^2 + 9X - 5 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = e^x \\ 2(X+5)\left(X - \frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\iff 2\underbrace{(e^x+5)}_{>0}\left(e^x - \frac{1}{2}\right) > 0 \iff \left(e^x - \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\iff e^x > \frac{1}{2} \iff x > ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

   • En conclusion, l'ensemble de définition $\mathscr{S}$ de cette inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]ln\left(\frac{1}{2}\right)\ ;\ +\infty\right[\ =]-ln(2)\ ;\ +\infty[}$$

7.15 Résolution d'équations et d'inéquations utilisant les exponentielles

1. Déterminer le signe du trinôme $X^2 - 3X + 2$ de variable X
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue x :

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante d'inconnue x :

$$e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue x :

$$e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$$

1. Le trinôme $X^2 - 3X + 2$ a deux racines évidentes $X = 1$ et $X = 2$ donc

X	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$X^2 - 3X + 2$		+	0	−	0	+	

2. Soit l'équation suivante d'inconnue x :

$$\text{(E)} : \qquad e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(I)} \iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 3X + 2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} X = e^x \\ X = 1 \text{ ou } X = 2 \end{cases}$

$\iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = 2 \iff x = ln(1) = 0 \text{ ou } x = ln(2)$
- En conclusion, l'ensemble de définition $\mathscr{S}$ de cette inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\ ;\ ln(2)\}}$$

3. Soit l'inéquation suivante d'inconnue x :

$$\text{(I)} : \qquad e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$$

- L'ensemble de définition de cette inéquation est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(I)} \iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 3X + 2 > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} X = e^x \\ X < 1 \text{ ou } X > 2 \end{cases}$

$\iff e^x < 1 \text{ ou } e^x > 2 \iff x < 0 \text{ ou } x > ln(2)$
- En conclusion, l'ensemble de définition $\mathscr{S}$ de cette inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ 0[\cup]ln(2)\ ;\ +\infty[}$$

4. Soit l'équation suivante d'inconnue x :

$$\text{(F)} : \qquad e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$$

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

- (I) $\iff e^{2x}e^{-1} - \sqrt{[e^{(x+1)}]^2} - 2e^3 = 0$
  $\iff e^{2x}\dfrac{1}{e} - e^{x+1} - 2e^3 = 0 \iff e^{2x}\dfrac{1}{e} - e^x e - 2e^3 = 0$
  $\iff \dfrac{e^{2x} - e^2 e^x - 2e^4}{e} = 0 \iff e^{2x} - e^2 e^x - 2e^4 = 0$
  $\iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - e^2 X - 2e^4 = 0 \end{cases}$
  $\iff \begin{cases} X = e^x \\ X = -e^2 \text{ ou } X = 2e^2 \end{cases}$
  $\iff \underbrace{e^x = -e^2}_{impossible} \text{ ou } e^x = 2e^2 \iff x = ln(2e^2)$
  $\iff x = ln(2) + ln(e^2) = ln(2) + 2ln(e) = 2 + ln(2)$
- En conclusion, l'ensemble de définition $\mathscr{S}$ de cette équation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2 + ln(2)\}}$$

8 Limites

8.1 Exercice

A partir des 5 limites de base de la fonction ln :

1. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} ln(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0^+$
3. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} ln(x) = -\infty$
4. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x ln(x) = 0^-$
5. $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{ln(x)}{x-1} = 1$
   dém : $\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{ln(x) - ln(1)}{x-1}$ = le nombre dérivé de ln en $1 = 1$

8.2 Oral Hec 15

> Soit un trinôme $P(x)$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) \geq 0$.
> Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) + P'(x) + P"(x) \geq 0$

posons $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Donc $P'(x) = 2ax + b$ et $P"(x) = 2a$.
alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) + P'(x) + P"(x) = ax^2 + x(b + 2a) + c + b + 2a$
Comme $\forall x \in \mathbb{R}$