Fonctions et Applications

Christian CYRILLE

13 décembre 2025

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Notion de Fonction

1.1 Définition

On dit que f est une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F lorsque f est une relation de l'ensemble E vers l'ensemble F telle que **tout élément** x **de E a au plus(c'est-à-dire** 0 **ou** 1 **image) dans** F On écrit :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Attention, il ne faut pas confondre f la fonction et $f(x)$ qui est l'image de x par f.
Si on appelle y l'image de x par f, on dit aussi que x est un antécédent de y par f

1.2 Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction de E vers F. Alors certains éléments de E peuvent ne pas avoir d'image et d'autres en ont une seule. On appelle ensemble de définition de f , l'ensemble des éléments x de E qui ont une image. On note D_f, cet ensemble de définition. Par conséquent $D_f = \{x \in E/f(x) existe\}$

1.3 Ensembles de définition de fonctions numériques

On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Voici quelques ensembles de définition classiques à connaître :

Si f(x) est	**alors son ensemble de définition** D_f **est :**
un polynôme	$\mathbb{R}$
$\dfrac{n(x)}{d(x)}$	$\{x \in \mathbb{R}/n(x) \text{ existe et } d(x) \text{ existe et } d(x) \neq 0\}$
$\sqrt{r(x)}$	$\{x \in \mathbb{R}/r(x) \text{ existe et } r(x) \geq 0\}$
$\ln(g(x))$	$\{x \in \mathbb{R}/g(x) \text{ existe et } g(x) > 0\}$
$\exp(h(x))$	$\{x \in \mathbb{R}/h(x) \text{ existe}\}$
$(gof)(x) = g[f(x)]$	$\{x \in \mathbb{R}/f(x) \text{ existe et } f(x) \in D_g\}$

1.4 Exercice

Déterminer les ensembles de définition des fonctions numériques d'une variable réelle définies par :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$
2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$
3. $h(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$
4. $i(x) = \ln(x+2) + \ln(x+3)$
5. $h(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$
6. $h(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

2 Notion d'Application

2.1 Définition

On dit que f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F lorsque f est une relation de l'ensemble E vers l'ensemble F telle que :
tout élément x de E a 1 et 1 seule image dans F

2.2 Propriétés

1. Si f est une **application** de E vers F alors f est une fonction de E vers F.
2. La réciproque est fausse mais si f est une fonction de E vers F alors f n'est pas forcément une application de E vers F. Par contre, la restriction de f à son ensemble de définition qu'on note f/D_f est une application de D_f vers F.
   Par exemple $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$

2.2.1 Exemples particuliers

1. On appelle application identique de E l'application
$$\begin{array}{rccc} Id_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x \end{array}$$
2. Soit A un sous-ensemble de E.
   On appelle Indicatrice de A l'application
$$\begin{array}{rccc} \chi_A : & E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ & x & \longmapsto & \chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

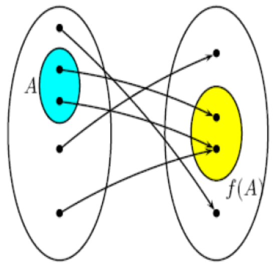
2.3 Egalité d'applications

Deux applications f et g sont dites égales lorsqu'elles ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée F et que $\forall x \in E$ on a $f(x) = g(x)$

2.4 Ensemble Image d'une partie

Soit f une application de E dans F.
Si A est une partie de E on appelle ensemble-image de A par f le sous-ensemble de F noté $f < A >$ formé des images des éléments de A par f.

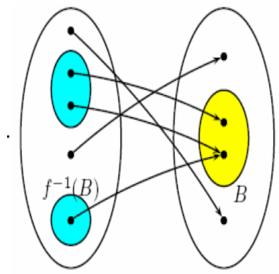
$$f < A >= \{f(x)/x \in A\}$$



2.5 Ensemble image réciproque d'une partie

Soit f une application de E dans F.
Si B est une partie de F on appelle ensemble-image réciproque de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1} < B >$ formé des antécédents des éléments de B par f.

$$f^{-1} < B >= \{x \in E/f(x) \in B\}$$



Sur notre schéma, $f^{-1} < B >$ est l'ensemble formé des 3 éléments des zones bleues

2.6 Opérations sur les applications

2.6.1 Somme

Soient f et g des applications de E dans $\mathbb{R}$.
On appelle somme des applications f et g l'application

$$\begin{array}{rccll} f+g: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) & = f(x)+g(x) \end{array}$$

2.6.2 Produit

Soient f et g des applications de E dans $\mathbb{R}$.
On appelle produit des applications f et g l'application

$$\begin{array}{rccll} f\ g: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & (f\ g)(x) & = f(x)\ g(x) \end{array}$$

2.6.3 Multiplication d'une application numérique par un réel

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une application de E dans $\mathbb{R}$.
On appelle multiplication de l'applications f par le réel λ l'application

$$\begin{array}{rccll} \lambda f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & (\lambda f)(x) & = \lambda f(x) \end{array}$$

2.7 Composée d'applications

2.7.1 Définition

Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G
On appelle composée de f suivie de g l'application

$$\begin{array}{rccll} g\ o\ f: & E & \longrightarrow & G & \\ & x & \longmapsto & (g\ o\ f)(x) & = g(f(x)) \end{array}$$

2.8 Remarques et Propriétés

1. Attention ! il se peut bien que l'on puisse créer $g\ o\ f$ mais que l'on ne puisse pas créer $f\ o\ g$
2. Si l'on peut créer $g\ o\ f$ et $f\ o\ g$, ces deux applications ne sont pas forcément égales donc la loi o de composition d'applications n'est pas commutative.
3. Par contre, cette loi est associative, c'est-à-dire que
   - si f une application de E dans F
   - si g une application de F dans G
   - si h une application de G dans H
   - alors $(h\ o\ g)\ o\ f = h\ o(g\ o\ f)$

2.9 Restriction et prolongement d'une application

2.9.1 Définitions

1. Si f est une application de E vers F et si A est une partie de E , alors l'application suivante notée

$$f/A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (f/A)(x) \quad = f(x) \end{array}$$

s'appelle la restriction de f à A.

2. Si f est une application de A dans F et si A est une partie de E, On appelle prolongement de f sur E toute application

$$g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

telle que pour tout x de A l'on a $g(x) = f(x)$

2.9.2 Exemple

f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car
   - $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$
   - $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$
   - $x \mapsto x$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^*$
2. f n'est pas définie en 0 donc n'est pas continue en 0

Comme l'on sait que $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
Soit g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \ si \ x \neq 0 \\ 1 \ si \ x = 0 \end{cases}$$

g prolonge f sur $\mathbb{R}$.
Comme

- g coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$ alors g y est donc continue car f l'est sur $\mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x \mapsto 0} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 = g(0)$ donc g est continue en 0
- Par conséquent g est continue sur $\mathbb{R}$.

On dira alors que g prolonge f par continuité en 0

2.9.3 Remarque

si f est une fonction de E vers F alors f/D_f est une application de D_f vers F

2.10 Application injective

2.10.1 Définitions équivalentes de l'injectivité

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.
On dit que f est injective lorsque l'une des définitions équivalentes suivantes est vérifiée

1. définition 1 :
   Deux éléments quelconques différents de E ont deux images différentes dans F.
   Ce qui se traduit par :
   $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
2. définition 2 (qui est la contraposée de la définition 1)
   $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$
3. définition 3 (en terme d'équation)
   pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x dans E admet **au plus** 1 **(c'est-à-dire** 0 *ou* 1**) solution dans** E

2.10.2 Définition de la non-injectivité

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.
On dit que f est non-injective lorsqu'il existe au moins deux éléments de E qui ont la même image dans F.
$\exists x \in E \; \exists x' \in E \quad f(x) = f(x') \; et \; x \neq x'$

2.10.3 Exemples

1. Ex 1 : toute fonction affine
$$\begin{array}{rcccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & f(x) & = ax+b \end{array}$$
où $a \neq 0$ est injective.

   - Une fonction affine étant définie sur $\mathbb{R}$ est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
   - Utiliser la définition 1 avec les différences est concluante :
     Soient x et x' des réels avec $x \neq x'$ alors $ax \neq ax'$ donc $ax+b \neq ax'+b$ donc $f(x) \neq f(x')$. CQFD.
   - Mais il est conseillé d'utiliser la définition 2 car il est plus facile d'utiliser les égalités que les différences :
     Soient x et x' des réels. Supposons $f(x) = f(x')$ donc $ax+b = ax'+b$ d'où $ax = ax'$ donc $a(x-x') = 0$. Par conséquent comme $a \neq 0$ on obtient $x = x'$. CQFD.
2. Ex 2 : la fonction carré
$$\begin{array}{rcccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & g(x) & = x^2 \end{array}$$
n'est pas injective
   - La fonction g étant définie sur $\mathbb{R}$ est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
   - mais elle n'est pas injective car $4 \neq -4$ et pourtant $g(4) = g(-4) = 16$
3. Ex 3 : la restriction h de la fonction carré à $\mathbb{R}^+$ c'est à dire
$$\begin{array}{rcccl} h: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & h(x) & = x^2 \end{array}$$
est injective .
En effet, soient x et x' des réels positifs . Supposons que $h(x) = h(x')$ donc $x^2 = x'^2$ donc $x^2 - x'^2 = 0$. D'où $(x-x')(x+x') = 0$ donc $x = x'$ ou $x = -x'$. Or il est impossible d'avoir $x = -x'$ sauf si $x = x' = 0$ car x et x' sont positifs. Donc on a $x = x'$. CQFD.
4. Ex 4 : l'application
$$\begin{array}{rcccl} f: & \mathbb{R}-\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} & \\ & x & \longmapsto & f(x) & = \dfrac{2x+1}{x+2} \end{array}$$
est injective
   - Utiliser la définition 1 avec les différences n'est pas concluante .
     En effet, soient x et x' des réels avec $x \neq x'$ alors $2x \neq 2x'$ donc $2x+1 \neq 2x'+1$. De même, $x+2 \neq x'+2$ mais on ne peut conclure que $f(x) \neq f(x')$. Par exemple, $2 \neq 4$ et $3 \neq 6$ mais $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$
   - Il faut donc utiliser la définition 2 : Soient x et x' des réels de $\mathbb{R}-\{-2\}$.
     Supposons $f(x) = f(x')$ donc $\dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{2x'+1}{x'+2}$
     donc $(2x+1)(x'+2) = (2x'+1)(x+2)$
     donc $2xx' + 4x + x' + 2 = 2xx' + 4x' + x + 2$ donc $3x = 3x'$ d'où $x = x'$. CQFD.

2.11 Application surjective

2.11.1 Définitions équivalentes de la surjectivité

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.
On dit que f est surjective lorsque l'une des définitions équivalentes suivantes est vérifiée

1. définition 1 :
   Tout élément de F a au moins un antécédent dans E.

2. définition 2 :
   $\forall y \in F \ \exists x \in E \quad y = f(x)$
3. définition 3 (en terme d'équation)
   Pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x dans E admet au moins 1 solution dans E

2.11.2 Définition de la non-surjectivité

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.
On dit que f est non-surjective lorsque l'une des définitions équivalentes suivantes est vérifiée

1. définition 1 :
   Il existe au moins un élément de F qui n'a pas d'antécédent dans E.

2. définition 2 :
   $\exists y \in F \ \forall x \in E \quad y \neq f(x)$

2.11.3 Exemples

1. La fonction carré
   $$\begin{array}{rccccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & x & \longmapsto & g(x) & = x^2 \end{array}$$
   n'est pas surjective
   - La fonction g étant définie sur $\mathbb{R}$ est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
   - mais elle n'est pas surjective car $g < \mathbb{R} >= \mathbb{R}^+$ donc un réel $y < 0$ n'a pas d'antécédent pour g dans $\mathbb{R}$
2. L'application
   $$\begin{array}{rccccl} i: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ & & \\ & x & \longmapsto & i(x) & = x^2 \end{array}$$
   est surjective .
   $\forall y \in \mathbb{R}^+$ l'équation $y = i(x)$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.
   $\Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow$ $x = \sqrt{y}$ *ou* $x = -\sqrt{y}$
   Tout y de $\mathbb{R}^+$ a donc deux antécédents $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$ dans $\mathbb{R}$ donc i est surjective.

2.12 Application bijective

2.12.1 Définitions équivalentes de la bijectivité

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.
On dit que f est bijective lorsque l'une des définitions équivalentes suivantes est vérifiée

1. définition 1 :
   Tout élément de F a un et un seul antécédent dans E.
2. définition 2 :
   $\forall y \in F \ \exists! \ x \in E \ y = f(x)$
3. définition 3 (en terme d'équation)
   Pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x dans E admet 1 et 1 seule solution dans E

Une application bijective s'appelle aussi une bijection.

2.12.2 Définition de la bijection réciproque

Si f est une bijection de E sur F

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

alors on peut créer l'application suivante :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array} \quad = \text{l'antécédent de y par f}$$

f^{-1} est elle aussi bijective et s'appelle la bijection réciproque de f

2.12.3 Propriétés

1. $f^{-1} \ o \ f = Id_E$
2. $f \ o \ f^{-1} = Id_F$
3. Si f est une bijection de E sur F et g une bijection de F sur G
   alors $g \ o \ f$ est une bijection de E sur G et $(g \ o \ f)^{-1} = f^{-1} \ o \ g^{-1}$
4. Si f est une application de E dans F
   Si g est une application de F dans E
   Si
   $$\left\{ \begin{array}{l} g \ o \ f = Id_E \\ f \ o \ g = Id_F \end{array} \right.$$
   Alors f est bijective et $f^{-1} = g$

Cette propriété est très utile pour démontrer que certaines applications sont bijectives, par exemple, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale, la translation, l'homothétie.

2.12.4 Condition suffisante de bijectivité d'une fonction numérique

Soit f est une fonction numérique d'une variable réelle.
Si f est **continue** et si f est **strictement monotone** sur un intervalle I
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f < I >$.

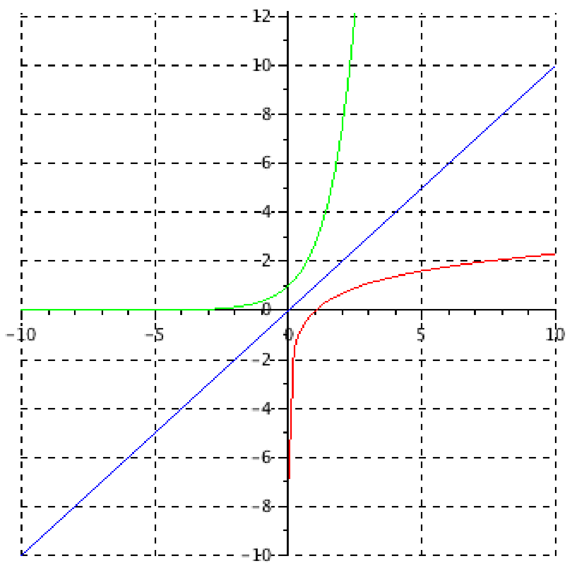
$$\begin{array}{rccll} f^{-1}: & J & \longrightarrow & I & \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = \text{l'antécédent de y par f} \end{array}$$

est telle que la courbe représentative de f^{-1} est l'image de la courbe représentative de f par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ dans un repère **orthonormé**.
De plus,

1. Comme f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $f < I >$.
2. si f **est dérivable sur** I **et si** f' **ne s'annule jamais sur** I alors f^{-1} est dérivable sur $f < I >$ et

$$\forall y \in f < I > \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

3. f^{-1} a le même sens de variations sur $f < I >$ que f sur I.



2.12.5 Exemples

1. Toute fonction affine

$$\begin{array}{rccll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & f(x) & = ax+b \end{array}$$

où $a \neq 0$ est bijective.
$\forall y \in \mathbb{R}$ l'on a : l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
$\Longleftrightarrow y = ax + b \Longleftrightarrow ax = y - b \Longleftrightarrow x = \dfrac{y-b}{a}$ car $a \neq 0$.
Tout y de $\mathbb{R}$ admet donc un antécédent unique $\dfrac{y-b}{a}$ dans $\mathbb{R}$ donc f est bijective.

$$\begin{array}{rccll} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = \dfrac{y-b}{a} \end{array}$$

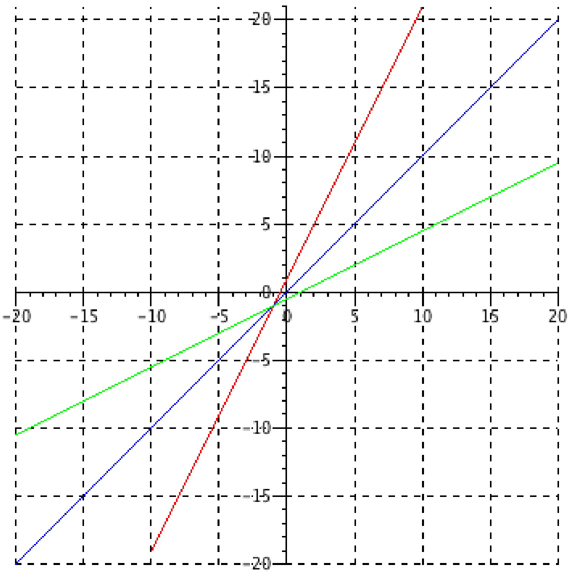
La fonction affine f est représentée graphiquement par la droite (D) d'équation $y = ax + b$ de pente a et d'ordonnée à l'origine b.

$$\begin{array}{rccll} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) & = \dfrac{x-b}{a} = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a} \end{array}$$

est elle aussi une fonction affine représentée graphiquement par la droite (D') d'équation $y = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$ de pente $\dfrac{1}{a}$ et d'ordonnée à l'origine $\dfrac{b}{a}$.
(D) et (D') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Programme en scilab

```
function y=f(x)
    y=2*x +1
endfunction
function y=g(x)
    y=x
endfunction
function y=h(x)
    y=(1/2)*x-(1/2)
endfunction
clf
quadrillage
orthonorme
x=linspace(-10,10,50)
plot(x,f,"r")
x=linspace(-20,20,50)
plot(x,g,"b",x,h,"g")
```



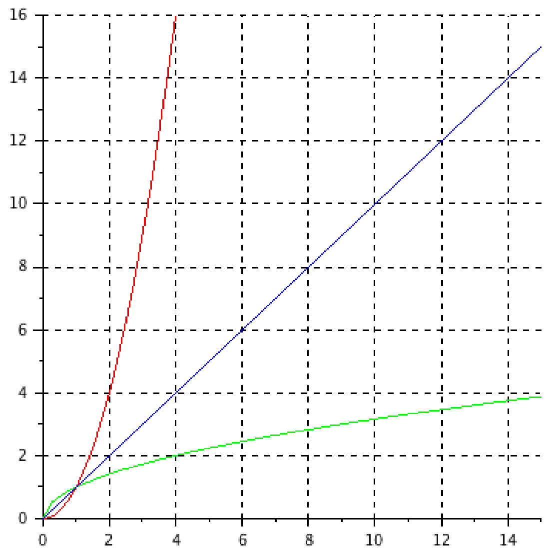
2. La fonction carré
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) \quad = x^2 \end{array}$$
n'est pas bijective car g n'est pas injective.
g n'est pas surjective non plus car $g < \mathbb{R} >= \mathbb{R}^+$ donc un réel $y < 0$ n'a pas d'antécédent pour g dans $\mathbb{R}$
3. L'application
$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) \quad = x^2 \end{array}$$
n'est pas bijective .
En effet, on a vu précédemment qu'elle était injective mais elle n'est pas surjective car $h < \mathbb{R}^+ >= \mathbb{R}^+$ donc un réel $y < 0$ n'a pas d'antécédent pour h dans $\mathbb{R}^*$
4. L'application
$$i: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & i(x) \quad = x^2 \end{array}$$
n'est pas bijective .
En effet, i n'est pas injective car $1 \neq -1$ et pourtant $i(1) = i(-1)$
5. L'application
$$j: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & j(x) \quad = x^2 \end{array}$$
est bijective .
$\forall y \in \mathbb{R}^+$ l'équation $y = j(x)$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}^+$.
$\Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow$ $x = \sqrt{y}$ *ou* $x = -\sqrt{y}$
La solution $x = -\sqrt{y}$ ne peut être acceptée que pour $y = 0$ (alors $x = 0$) et à rejeter pour $y > 0$ car alors $-\sqrt{y} < 0$.

Tout y de $\mathbb{R}^+$ a donc un seul antécédent $\sqrt{y}$ dans $\mathbb{R}^+$ donc j est bijective.
Alors

$$\begin{array}{rccll} j^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ & \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = \sqrt{y} \end{array}$$

programme en scilab

```
function y=f(x)
    y=x*x
endfunction
function y=g(x)
    y=x
endfunction
function y=h(x)
    y=sqrt(x)
endfunction
   clf
   quadrillage
   orthonorme
   x=linspace(0,4,50)
   plot(x,f,"r")
   x=linspace(0,15,50)
   plot(x,h,"g")
   plot(x,g,"b")
```



6. L'application

$$f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}-\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} & & \\ x & \longmapsto & f(x) & = & \dfrac{2x+1}{x+2} \end{array}$$

est bijective

(a) Méthode 1 :

Soit $y \in \mathbb{R}-\{2\}$, $y = f(x) \Longleftrightarrow y = \dfrac{2x+1}{x+2} \Longleftrightarrow yx+2y = 2x+1$

$\Longleftrightarrow x(y-2) = 1-2y \Longleftrightarrow x = \dfrac{1-2y}{y-2}$ car $y \neq 2$.

Résolvons pour cela l'équation $\dfrac{1-2y}{y-2} = -2$.

$\dfrac{1-2y}{y-2} = -2 \Longleftrightarrow 1-2y = -2y+4 \Longleftrightarrow 1 = 4$ impossible

Donc l'antécédent de y qui est $\dfrac{1-2y}{y-2}$est bien un élément de $\mathbb{R}-\{-2\}$

Par conséquent, f est bien une application bijective de $\mathbb{R}-\{-2\}$ dans $\mathbb{R}-\{2\}$ et

$$f^{-1}: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{-2\} & & \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = & \dfrac{-2y+1}{y-2} \end{array}$$

(b) Méthode 2 :

i. $D_f = \mathbb{R}-\{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

ii. f est une fonction fraction rationnelle donc f est dérivable donc continue sur son ensemble de définition

iii. $\forall x \in D_f$ l'on a : $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ donc $f'(x) > 0$. Par conséquent f est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$

iv. Comme f est une fonction rationnelle alors les limites à l'infini sont les limites à l'infini du rapport des termes de plus haut degré. Par conséquent,

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = 2.$

Par conséquent, C_f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

Par conséquent, C_f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

v. A. Quand $x \to -2^-$ alors $2x+1 \to -3$ et $x+2 \to 0^-$ donc $f(x) \to +\infty$

Par conséquent, C_f admet au voisinage de -2^- une asymptote verticale d'équation $x = -2$

B. Quand $x \to -2^+$ alors $2x+1 \to -3$ et $x+2 \to 0^+$ donc $f(x) \to -\infty$
Par conséquent, C_f admet au voisinage de -2^+ une asymptote verticale d'équation $x = -2$

vi. Voici donc le tableau de variations de f

vii. A. Comme f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ alors f réalise une bijection de $]-\infty; -2[$ sur $f <]-\infty; -2[>$ qui est $]2; +\infty[$

B. Comme f est continue et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$ alors f réalise une bijection de $]-2; +\infty[$ sur $f <]-2; +\infty[>$ qui est $]-\infty; 2[$

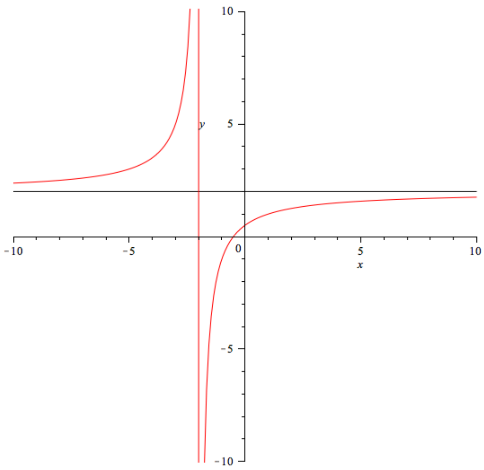
C. De plus $f(x) = 2 \iff \dfrac{2x+1}{x+2} = 2 \iff 2x+1 = 2x+4 \iff 1 = 4$ impossible

D. par conséquent $f < \mathbb{R} - \{-2\} >$ est $\mathbb{R} - \{2\}$ et f est une application bijective de $\mathbb{R} - \{-2\}$ sur $\mathbb{R} - \{2\}$

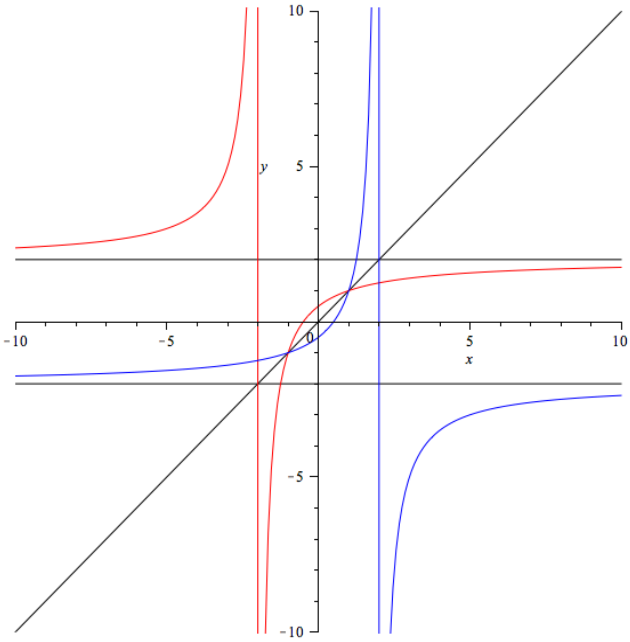
viii. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow 2$

Voici la courbe représentative de f qui est une hyperbole de centre $\Omega(-2; 2)$ et d'axes $D_1 : y = 2$ et $D_2 : x = -2$



Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
La courbe représentative de f^{-1} est aussi une hyperbole de centre $\Omega'(2; -2)$ et d'axes $D'_1 : x = 2$ et $D'_2 : y = -2$
Ω' est le symétrique de Ω par rapport à la droite d'équation $y = x$.
D'_1 est le symétrique de D_1 par rapport à la droite d'équation $y = x$.
D'_2 est le symétrique de D_2 par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Courbes représentatives de f et de f^{-1}

2.13 Bijections et Involutions

2.13.1 Un lemme intéressant à savoir redémontrer en cas de besoin

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F et soit g une application de l'ensemble F dans l'ensemble E.
Démontrer que si $g\ o\ f = Id_E$ et si $f\ o\ g = Id_F$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$

2.13.2 Bijections géométriques

1. Soit $T_{\vec{u}}$ la translation plane de vecteur $\vec{u}$. Déterminer $T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}}$ puis $T_{-\vec{u}} \circ T_{\vec{u}}$. en déduire que toute translation est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
2. Soit S_Δ la symétrie orthogonale plane d'axe Δ. Déterminer $S_\Delta \circ S_\Delta$. En déduire que toute symétrie orthogonale est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
3. Soit S_Ω la symétrie centrale plane de centre Ω. Déterminer $S_\Omega \circ S_\Omega$. En déduire que toute symétrie centrale est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
4. Soit $R(\Omega, \theta)$ la rotation plane de centre Ω et d'angle de mesure θ. Déterminer $R(\Omega, \theta) \circ R(\Omega, -\theta)$ puis $R(\Omega, -\theta) \circ R(\Omega, \theta)$. En déduire que toute rotation est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
5. Soit $H(\Omega, k)$ l'homothétie plane de centre Ω et de rapport $k \neq 0$.Déterminer $H(\Omega, k) \circ H(\Omega, \frac{1}{k})$ puis $H(\Omega, \frac{1}{k}) \circ H(\Omega, k)$. En déduire que toute homothétie est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

2.13.3 Cas particulier de l'involution

Une application de E dans E est dite involutive lorsque $f \circ f = Id_E$.
D'après le lemme précédent, toute involution est bijective et $f^{-1} = f$.

2.13.4 Exemples d'involutions

1. Toute symétrie orthogonale plane est involutive.
2. Toute symétrie centrale plane est involutive.
3. Déterminer deux sous-ensembles E et F les plus grands possibles de $\mathbb{R}$ tels que la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \end{array}$$

définisse une bijection de E vers F. Déterminer ensuite la bijection réciproque de f. Que remarquez-vous ?

Démonstration du lemme

Supposons que $g \circ f = Id_E$ et si $f \circ g = Id_F$.
Pour démontrer que f est bijective, nous allons démontre que tout élément $y \in F$ a un antécédent unique x dans E.

- Existence de l'antécédent :
  Soit $y \in F$.
  Alors $y = id_F(y) = (f \circ g)(y) = f[g(y)]$.
  Or $g(y) \in E$.
  Donc y a au moins un antécédent dans E c'est $g(y)$. CQFD.
- Unicité de l'antécédent :
  Supposons que y a deux antécédents x et x' dans E pour f.
  Alors $y = f(x) = f(x')$.
  Donc $x = id_E(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[f(x')]$
  $= (g \circ f)(x') = id_E(x') = x'$
  Par conséquent, y a un antécédent unique dans E pour f

Alors

- f est bijective
- f a donc une bijection réciproque définie ainsi :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \text{ l'antécédent de } y \text{ par } f = g(y) \end{array}$$

- Donc $f^{-1} = g$

Bijections géométriques

1. Soit $T_{\vec{u}}$ la translation plane de vecteur $\vec{u}$
   - $T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}} = T_{-\vec{u}+\vec{u}} = T_{\vec{0}} = id_P$
   - $T_{-\vec{u}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}-\vec{u}} = T_{\vec{0}} = id_P$
   - En conclusion toute translation $T_{\vec{u}}$ est bijective et $[T_{\vec{u}}]^{-1} = T_{-\vec{u}}$
2. Soit S_Δ la symétrie orthogonale plane d'axe Δ.
   - $S_\Delta \circ S_\Delta = id_P$
   - $S_\Delta \circ S_\Delta = id_P$
   - Donc toute symétrie orthogonale S_Δ est bijective et $[S_\Delta]^{-1} = S_\Delta$
3. Soit S_Ω la symétrie centrale plane de centre Ω.
   - $S_\Omega \circ S_\Omega = id_P$
   - $S_\Omega \circ S_\Omega = id_P$
   - Donc toute symétrie centrale S_Ω est bijective et $[S_\Omega]^{-1} = S_\Omega$.
4. Soit $R(\Omega, \theta)$ la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ.
   - $R(\Omega, \theta) \circ R(\Omega, -\theta) = R(\Omega, -\theta + \theta) = R(\Omega, 0) = id_P$
   - $R(\Omega, -\theta) \circ R(\Omega, \theta) = R(\Omega, \theta - \theta) = R(\Omega, 0) = id_P$
   - Donc toute rotation $R(\Omega, \theta)$ est bijective et $[]^{-1} = R(\Omega, -\theta)$.
5. Soit $H(\Omega, k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 0$.
   - $H(\Omega, k) \circ H\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) = H\left(\Omega, \frac{1}{k} \times k\right) = H(\Omega, 1) = id_P$
   - $H\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ H(\Omega, k) = H\left(\Omega, k \times \frac{1}{k}\right) = H(\Omega, 1) = id_P$
   - Donc toute homothétie $H(\Omega, k)$ est bijective et $[H(\Omega, k)]^{-1} = H\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$

Cas particulier de l'involution
Une application de E dans E est dite involutive lorsque $f \circ f = Id_E$. D'après le lemme précédent, toute involution est bijective et $f^{-1} = f$.

Exemples d'involutions

1. Toute symétrie orthogonale est involutive car
   - S_Δ est bijective
   - $[S_\Delta]^{-1} = S_\Delta$
2. Toute symétrie centrale est involutive car
   - S_Ω est bijective
   - $[S_\Omega]^{-1} = S_\Omega$
3. Ondésire que la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \end{array}$$

définisse une bijection de E vers F.

- Il faut donc prendre $E = \mathbb{R} - \{1\}$
- Soit $y \in F$. l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet-elle une seule solution $x \in E$
  - ⋄ $y = f(x) \iff y = \dfrac{x+2}{x-1} \iff y(x-1) = x+2$
    $\iff yx - y = x + 2 \iff x[y-1] = y+2$
  - ⋄ En prenant $F = \mathbb{R} - \{1\}$ alors $y \neq 1$ et alors
    $y = f(x) \iff x[y-1] = y+2 \iff x = \dfrac{y-2}{y-1}$
  - ⋄ Tout $y \in F$ admet donc un unique antécédent $\dfrac{y-2}{y-1}$ mais cet antécédent est-il dans E ? Oui car

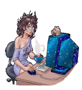
$$(p): \quad \frac{y-2}{y-1} = 1 \iff y-2 = y-1 \iff 2 = 1 \qquad (q)$$

    On a $p \iff q$ qui est vraie . Mais la proposition (q) est fausse donc la proposition p est fausse. Donc $\forall y \neq 1 \quad \dfrac{y-2}{y-1} \neq 1$
- ⋄ f réalise une bijection de $E = \mathbb{R} - \{1\}$ sur $F = \mathbb{R} - \{1\}$
  ⋄ Sa bijection réciproque est

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} F = & \longrightarrow & E = \mathbb{R} - \{1\} \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{y-1} \end{array}$$

  ⋄ f est bijective avec ici $f^{-1} = f$ donc f est une involution.

.



2.14 Les fonctions trigonométriques inverses

2.14.1 La fonction *Arcsinus*

Soit f la restriction de sin à $I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

- f est continue sur I
- f est strictement croissante sur I
- alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f < I >= [-1; 1]$

Ce qui entraîne l'existence d'une bijection réciproque f^{-1} notée

$Arcsin : [-1; 1] \to I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'antécédent de } y \text{ par sin dans } [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

$Arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ car $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

$Arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$ car $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ car $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$ car $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

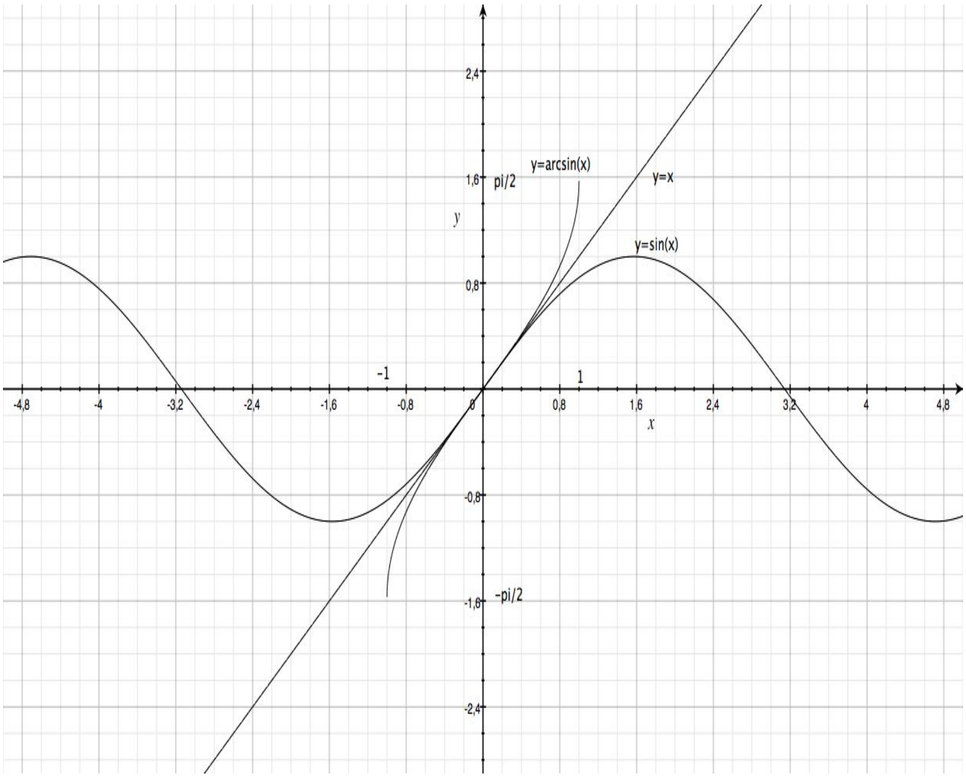
$Arcsin(0) = 0$ car $\sin(0) = 0$

$Arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ car $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$Arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$ car $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$ car $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ car $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$



2.14.2 La fonction *Arccosinus*

Soit f la restriction de cos à $I = [0; \pi]$.

- f est continue sur I
- f est strictement décroissante sur I
- alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f < I >= [-1; 1]$

Ce qui entraîne l'existence d'une bijection réciproque f^{-1} notée

$Arccos : [-1; 1] \to I = [0; \pi]$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'antécédent de } y \text{ par cos dans } [0; \pi].$$

$Arccos(-1) = \pi$ car $\cos(\pi) = -1$

$Arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$ car $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$ car $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ car $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

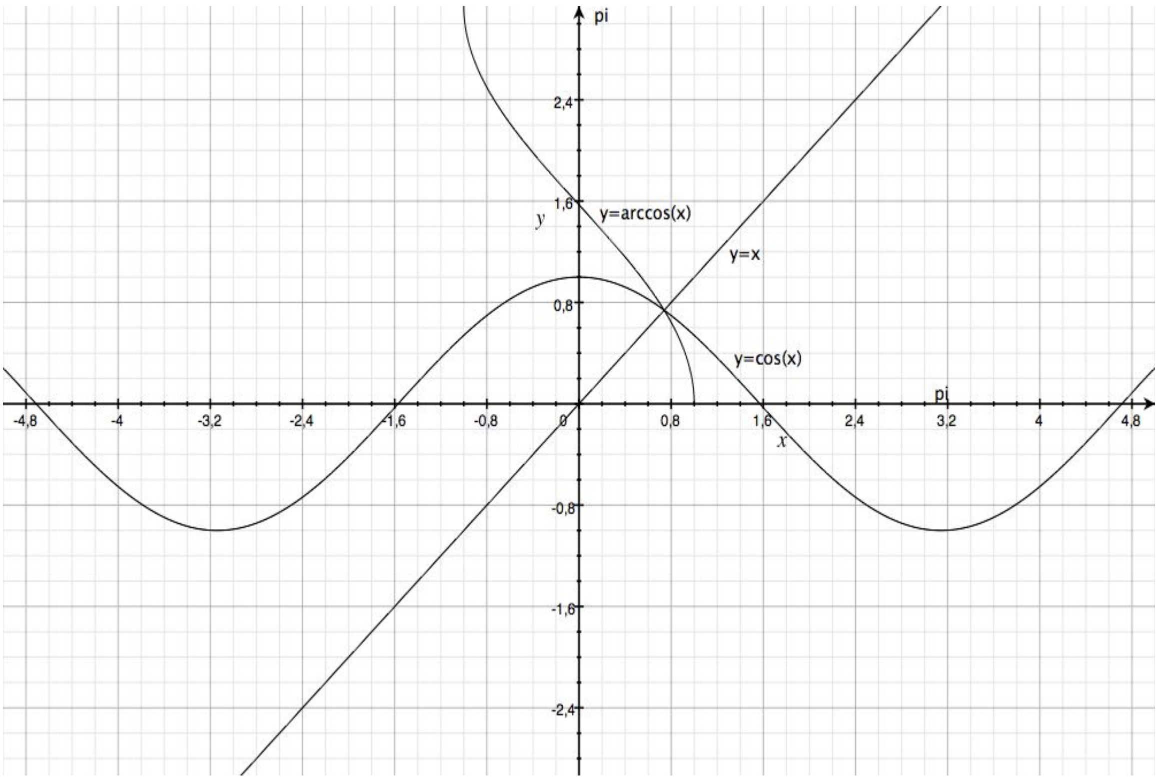
$Arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$Arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ car $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$Arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$ car $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$ car $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Arccos(1) = 0$ car $\cos(0) = 1$



2.14.3 La fonction *Arctangente*

Soit f la restriction de tan à $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

- f est continue sur I
- f est strictement croissante sur I
- alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f < I >=]-\infty; \infty[= \mathbb{R}$

Ce qui entraîne l'existence d'une bijection réciproque f^{-1} notée

$Arctan : \mathbb{R} \to I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'antécédent de } y \text{ par tan dans }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} Arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

$Arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ car $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

$Arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ car $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

$Arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$ car $\tan(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

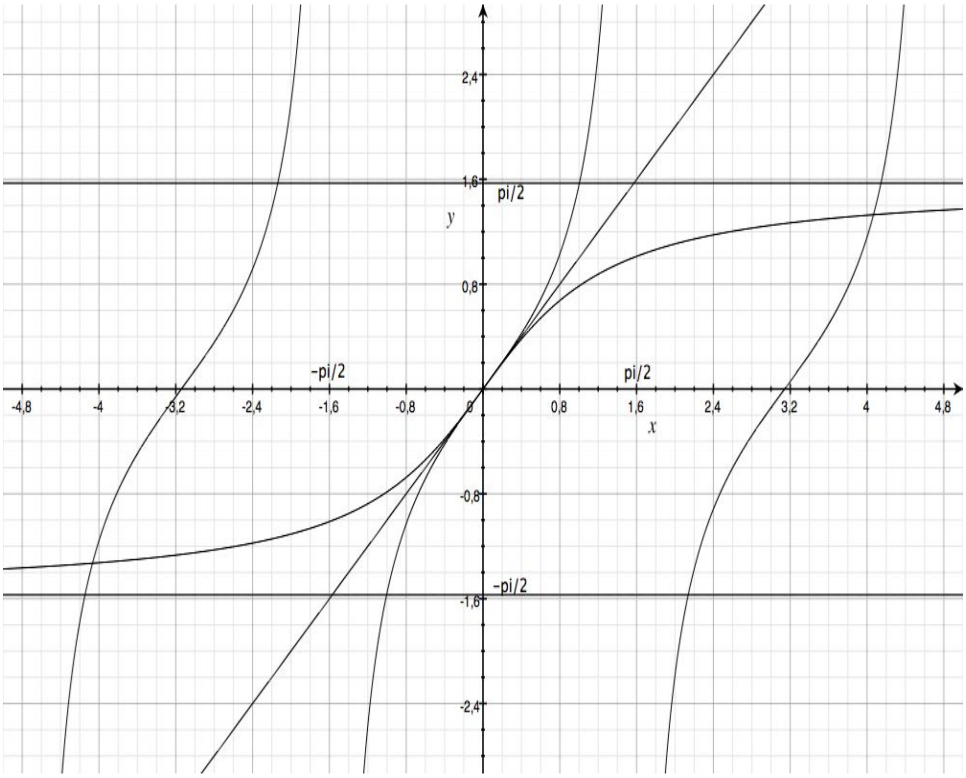
$Arctan(0) = 0$ car $\tan(0) = 0$

$Arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$ car $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

$Arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ car $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$



2.14.4 Propriétés des fonctions circulaires réciproques

1. *Arcsin* **est impaire** car :
   - $\forall y \in D_{Arcsin}$ on a $-y \in D_{Arcsin}$ puisque $D_{Arcsin} = [-1; 1]$
   - soit $y \in [-1; 1]$ alors $\exists x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $y = sin(x)$. Cet x est $Arcsin(y)$.
     Mais comme $y = sin(x)$ alors $-y = -sin(x) = sin(-x)$.
     Or $-x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ puisque $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
     Donc $-x = Arcsin(-y)$ d'où $Arcsin(-y) = -x = -Arcsin(y)$. CQFD
2. *Arccos* **n'est ni paire ni impaire** car
   - bien que $\forall y \in D_{Arcsin}$ on a $-y \in D_{Arcsin}$ puisque $D_{Arcsin} = [-1; 1]$
   - on a $Arccos(-1) \neq Arccos(1)$ et $Arccos(-1) \neq -Arccos(1)$.
     En effet, $Arccos(-1) = -\pi$ puisque $cos(-\pi) = -1$ et $Arccos(1) = 0$ puisque $cos(0) = 1$
3. *Arctan* **est impaire** car :
   - $\forall y \in D_{Arctan}$ on a $-y \in D_{Arctan}$ puisque $D_{Arctan} = \mathbb{R}$
   - soit $y \in \mathbb{R}$ alors $\exists x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ tel que $y = tan(x)$. Cet x est $Arctan(y)$.
     Mais comme $y = tan(x)$ alors $-y = -tan(x) = tan(-x)$.
     Or $-x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ puisque $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
     Donc $-x = Arctan(-y)$ d'où $Arctan(-y) = -x = -Arctan(y)$. CQFD

4. $\boxed{\forall y \in [-1;1] \;\; sin(Arcsin(y)) = y}$

5. $\boxed{\forall y \in [-1;1] \;\; cos(Arccos(y)) = y}$

6. $\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \;\; tan(Arctan(y)) = y}$

7. $\forall x \in \mathbb{R}$ $Arcsin(sin(x))$ = la mesure α située dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ telle que $sin(\alpha) = sin(x)$

$$\boxed{Arcsin(sin(x)) = \begin{cases} x - 2k\pi \;\; si \;\; x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \\ \pi - x + 2k\pi \;\; si \;\; x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] \end{cases}}$$

8. $\forall x \in \mathbb{R}$ $Arccos(cos(x))$ = la mesure α située dans $[0;\pi]$ telle que $cos(\alpha) = cos(x)$

$$\boxed{Arccos(cos(x)) = \begin{cases} x - 2k\pi \;\; si \;\; x \in [0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi] \\ 2\pi - x + 2k\pi \;\; si \;\; x \in [\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi] \end{cases}}$$

9. $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
$Arctan(tan(x))$ = la mesure α située dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ telle que $tan(\alpha) = tan(x)$

$$\boxed{Arctan(tan(x)) = \begin{cases} x - 2k\pi \;\; si \;\; x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\\ \\ x - \pi - 2k\pi \;\; si \;\; x \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[\;\; avec \;\; k \neq 0 \end{cases}}$$

10. $\boxed{\forall y \in [-1;1] \;\; sin(Arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}}$
$\forall y \in [-1;1]$ $sin^2(Arccos(y)) = 1 - cos^2(Arccos(y)) = 1 - y^2$
donc $sin(Arccos(y)) = \pm\sqrt{1-y^2}$.
Mais comme $Arccos(y) \in [0;\pi]$ alors
$sin(Arccos(y)) \geq 0$ donc $sin(Arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$

11. $\boxed{\forall y \in [-1;1] \;\; cos(Arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}}$
$\forall y \in [-1;1]$ $cos^2(Arcsin(y)) = 1 - sin^2(Arcsin(y)) = 1 - y^2$
donc $cos(Arcsin(y)) = \pm\sqrt{1-y^2}$.
Mais comme $Arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ alors
$cos(Arcsin(y)) \geq 0$ donc $cos(Arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$

12. $\boxed{\forall y \in [-1;1] \quad Arcsin(y) + Arccos(y) = \frac{\pi}{2}}$
$\forall y \in [-1;1]$
$sin(Arcsin(y)+Arccos(y)) = sin(Arcsin(y))cos(Arccos(y))+sin(Arccos(y))cos(Arcsin(y))$
$= yy + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-y^2} = y^2 + 1 - y^2 = 1$.
Or $-\frac{\pi}{2} \leq Arcsin(y) \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq Arccos(y) \leq \pi$
donc $-\frac{\pi}{2} \leq Arcsin(y) + Arccos(y) \leq \frac{3\pi}{2}$.
Or la seule mesure d'angle située dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ et dont le sinus vaut 1 est $\frac{\pi}{2}$.
Par conséquent, $Arcsin(y) + Arccos(y) = \frac{\pi}{2}$

13. $\boxed{\textbf{Arcsin est dérivable sur }]-1\ ;\ 1[\text{ et } \forall y \in]-1\ ;\ 1[\quad (Arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$
f la restriction de sin à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ y est dérivable et y admet pour nombre dérivé $cos(x)$ qui ne s'y annule jamais car $cos(x) > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
Donc $Arcsin$ est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall y \in]-1;1[\quad (Arcsin)'(y) =$
$\frac{1}{sin'(Arcsin(y))} = \frac{1}{cos(Arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

14. $\boxed{\textbf{Arccos est dérivable sur }]-1\ ;\ 1[\text{ et } \forall y \in]-1\ ;\ 1[\quad (Arccos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$
f la restriction de cos à $]0;\pi[$ y est dérivable et y admet pour nombre dérivé $-sin(x)$ qui ne s'y annule jamais car $-sin(x) < 0$ sur $]0;\pi[$.
Donc $Arccos$ est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall y \in]-1;1[$
$(Arccos)'(y) = \frac{1}{cos'(Arccos(y))} = \frac{1}{-sin(Arcsin(y))} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
Autre méthode :
$\forall y \in [-1;1] \quad Arcsin(y)+Arccos(y) = \frac{\pi}{2}$ donc $Arccos(y) = \frac{\pi}{2} - Arcsin(y)$
$Arccos'(y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)' - Arcsin'(y) = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

15. $\boxed{Arctan \textbf{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \quad (Arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$
f la restriction de tan à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ y est dérivable et y admet pour nombre dérivé $1 + tan^2(x)$ qui ne s'y annule jamais car $1 + tan^2(x) > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
Donc $Arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad (Arctan)'(y) = \frac{1}{tan'(Arctan(y))} = \frac{1}{1 + tan^2(Arctan(y))} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

16. $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } xy \neq -1 \qquad arctan(x) - arctan(y) = arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)}$

2.15 Les fonctions hyperboliques inverses

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ et $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.

2.15.1 Etude de la fonction sh

Soit la fonction sinus hyperbolique sh définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

1. $D_{sh} = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_{sh}$ on a $-x \in D_{sh}$.
   Alors $sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)$ donc sh est impaire
2. Comme la courbe de sh admet O comme centre de symétrie, il suffit d'étudier sh sur $\mathbb{R}^+$.
   sh est la différence de f et de g qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $sh'(x) = ch(x) > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sh(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-x} = 0$
   On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de sh :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sh(x) - f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} -\dfrac{e^{-x}}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
4. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $sh(x) - f(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2} < 0$ alors C_{sh} est en dessous de C_f
5. Posons $k(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2}$. Comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} sh(x) - k(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{e^x}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe C_k
6. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $sh(x) - k(x) = \dfrac{e^x}{2} > 0$ alors C_{sh} est au dessus de C_f
7. La tangente en 0 à C_{sh} est la droite d'équation $y = sh'(0)(x - 0) + sh(0)$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

2.15.2 Etude de la fonction ch

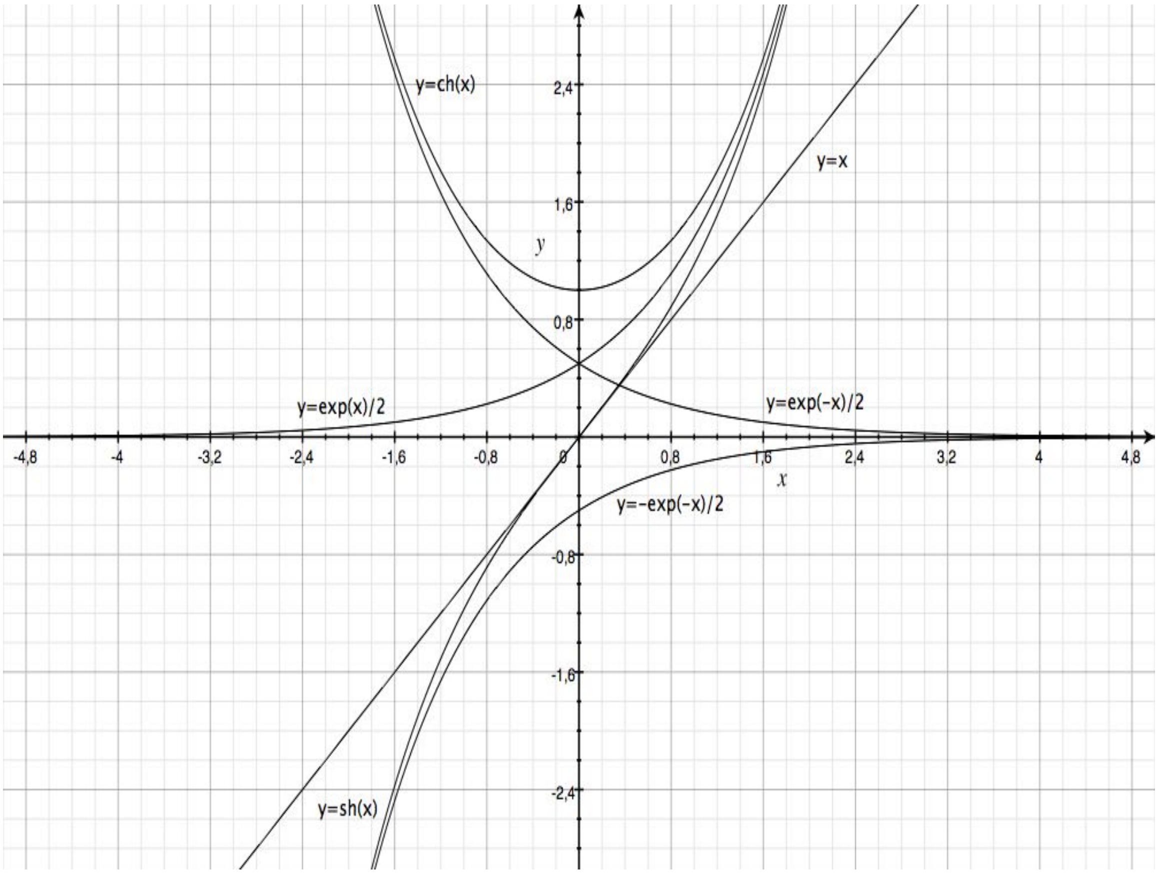
Soit la fonction cosinus hyperbolique ch définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

1. $D_{ch} = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_{ch}$ on a $-x \in D_{ch}$.
   Alors , $ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$ donc ch est paire
2. Comme la courbe de ch admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, il suffit d'étudier ch sur $\mathbb{R}^+$.
   ch est la somme de f et de g qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $ch'(x) = sh(x) \geq 0$. $ch'(x)$ ne s'annule qu'en 0 alors ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} ch(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-x} = 0$
   On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} ch(x) - f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^{-x}}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{ch} de ch admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
4. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $ch(x) - f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2} > 0$ alors C_{ch} est au dessus de C_f
5. Comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} ch(x) - g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{e^x}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe C_g
6. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $ch(x) - g(x) = \dfrac{e^x}{2} > 0$ alors C_{ch} est au dessus de C_g
7. La tangente en 0 à C_{ch} est la droite d'équation $y = ch'(0)(x - 0) + ch(0)$ c'est-à-dire d'équation $y = 1$.


y=ch(x)
y=x
y
y=exp(x)/2
y=exp(-x)/2
y=-exp(-x)/2
x
y=sh(x)
2,4
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-2,4
-4,8
-4
-3,2
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
4
4,8

2.15.3 Etude de la fonction th

Soit la fonction tangente hyperbolique th définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}}$$

1. th est le quotient de sh et de ch qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ donc $D_{th} = \mathbb{R}$.
   $\forall x \in D_{th} = \mathbb{R}$ on a $-x \in D_{th}$ et $th(-x) = \dfrac{sh(-x)}{ch(-x)} = \dfrac{-sh(x)}{ch(x)} = th(x)$
   donc th est impaire. Sa courbe admet donc O comme centre de symétrie.
   Comme sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec en plus ch qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ alors th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}$ $th'(x) = \dfrac{ch(x)ch(x) - sh(x)sh(x)}{ch^2(x)} = \dfrac{1}{ch^2(x)} > 0$
   Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} th(x) = 1$ car $th(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1 + \dfrac{1}{e^{2x}}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{e^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{e^{2x}}}$

   $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$
   On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de th :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$th'(x)$		$+$		$+$	
$th(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

2.15.4 Fonctions hyperboliques inverses

1. Comme la restriction de ch à $\mathbb{R}^+$ y est continue et strictement croissante alors elle réalise une application bijective de $\mathbb{R}^+$ sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$. On appelle argument cosinus hyperbolique que l'on notera $argch$ sa bijection réciproque.
2. les courbes représentatives de la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$ et de $argch$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Comme 1 a pour antécédent 0, comme la tangente au point d'abscisse 0 de C_{ch} a pour équation $y = 1$ alors la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de $argch$ a pour équation $x = 1$. Cette tangente est verticale et $Argch$ n'est pas dérivable en 1

3. • Méthode 1 :
   Soit $y \in [1;+\infty[$alors
   $ch(ln(y+\sqrt{y^2-1})) = \frac{1}{2}\left(exp(ln(y+\sqrt{y^2-1})) + exp(-ln(y+\sqrt{y^2-1}))\right)$
   $= \frac{1}{2}\left((y+\sqrt{y^2-1}) + exp(ln(\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}))\right)$
   $= \frac{1}{2}\left((y+\sqrt{y^2-1}) + (\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}))= \frac{1}{2}(\frac{(y+\sqrt{y^2-1})^2+1}{y+\sqrt{y^2-1}})\right)$
   $= \frac{1}{2}\left(\frac{(y^2+y^2-1+2y\sqrt{y^2-1}+1}{y+\sqrt{y^2-1}})\right) = y$
   Donc $ln(y+\sqrt{y^2-1})$ est l'antécédent de y par ch donc

$$\boxed{argch(y) = ln(y+\sqrt{y^2-1})}$$

   • Méthode 2 :
   Soit $y \in [1;+\infty[$
   On sait que $ch^2(argch(y)) - sh^2(argch(y) = 1$
   Donc $sh^2(argch(y)) = ch^2(argch(y)) - 1 = y^2 - 1$
   Or $y \geq 1$ donc $argch(y) \geq 0$ donc $sh(argch(y)) = +\sqrt{1-y^2}$.
   Or $sh(x) = ch(x) - e^{-x}$
   donc $ch(argch(y)) - e^{-argch(y)} = sh(argch(y)) = \sqrt{y^2-1}$.
   Comme $ch(argch(y)) = y$ alors $y - e^{-argch(y)} = \sqrt{y^2-1}$
   d'où $y - \sqrt{y^2-1} = e^{-argch(y)}$.
   On en déduit que $ln(y-\sqrt{y^2-1}) = ln(e^{-argch(y)})$
   donc $argch(y) = -ln(y-\sqrt{y^2-1}) = ln\left(\frac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}\right) = ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{y^2-(y^2-1)}\right)$
   Par conséquent,

$$\boxed{argch(y) = ln(y+\sqrt{y^2-1})}$$

4. Comme $ch' = sh$ ne s'annule jamais sur $]0;+\infty[$ alors $argch$ est dérivable sur $]1;+\infty[$.
   Alors $\forall y > 1 \quad (argch)'(y) = ln'(y+\sqrt{y^2-1}) = \frac{1+\frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{y+\sqrt{y^2-1}}$

$$\boxed{\forall y > 1 \quad (argch)'(y) = \frac{\sqrt{y^2-1}+y}{(y+\sqrt{y^2-1})(\sqrt{y^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}}$$

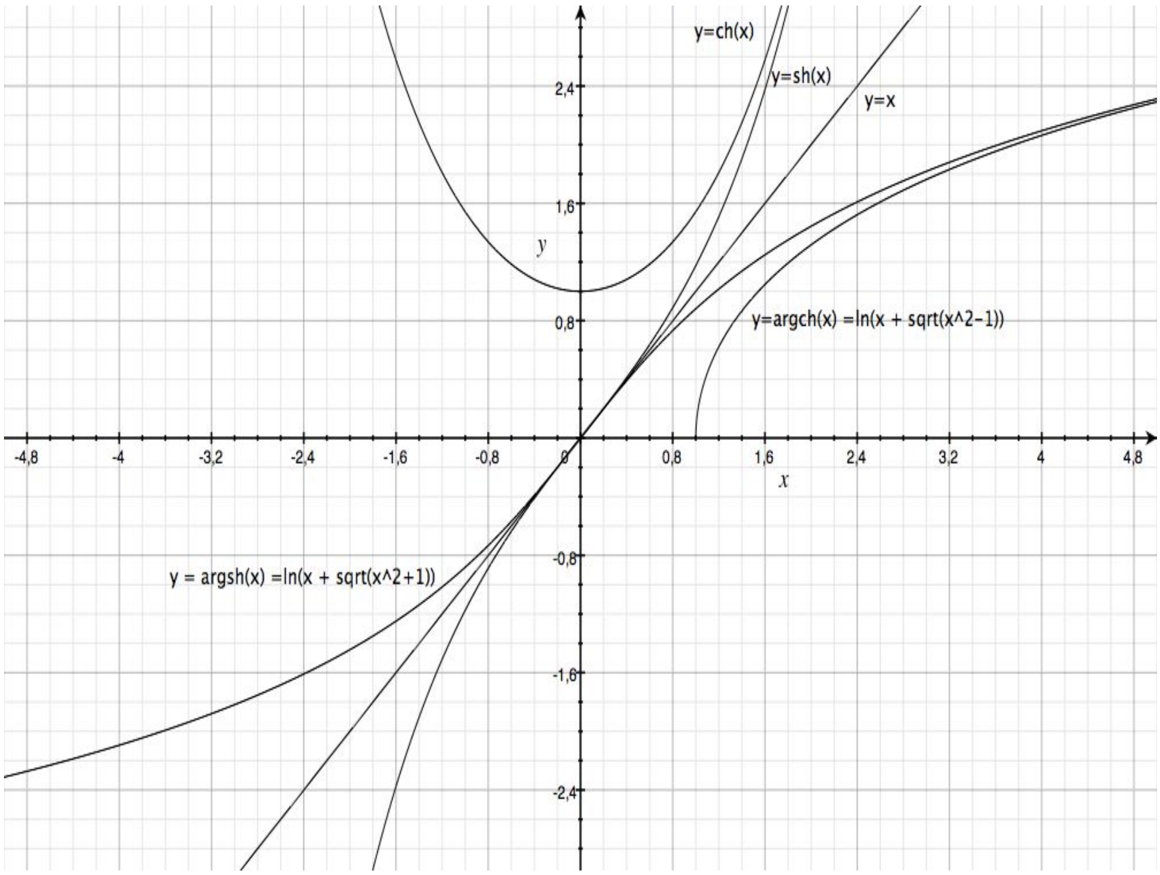
5. Comme sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors elle réalise une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On appelle argument sinus hyperbolique que l'on notera $argsh$ sa bijection réciproque.
6. Les courbes représentatives de sh et de $argsh$ sont symétriques par raport à la droite d'équation $y = x$. Comme 0 a pour antécédent 0, comme la tangente au point d'abscisse 0 de C_{ch} a pour équation $y = x$ alors la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de $argsh$ a pour équation $y = x$.

7. Soit $y \in \mathbb{R}$ alors
$sh(ln(y+\sqrt{y^2+1})) = \frac{1}{2}\left(exp(ln(y+\sqrt{y^2+1})) - exp(-ln(y+\sqrt{y^2+1}))\right)$
$= \frac{1}{2}\left((y+\sqrt{y^2+1}) - exp(ln(\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}))\right)$
$= \frac{1}{2}\left((y+\sqrt{y^2+1}) - (\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}})) = \frac{1}{2}(\frac{(y+\sqrt{y^2+1})^2-1}{y+\sqrt{y^2+1}})\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{(y^2+y^2+1+2y\sqrt{y^2+1}-1}{y+\sqrt{y^2+1}})\right) = y$ donc $ln(y+\sqrt{y^2+1})$ est l'antécédent de y par ch donc

$$\boxed{argch(y) = ln(y+\sqrt{y^2+1})}$$

8. Comme $sh' = ch$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ alors $argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $(argsh)'(y) = ln'(y+\sqrt{y^2+1}) = \frac{1+\frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}}{y+\sqrt{y^2+1}}$

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \quad (argsh)'(y) = \frac{\sqrt{y^2+1}+y}{(y+\sqrt{y^2+1})(\sqrt{y^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}}$$


y=ch(x)
y=sh(x)
y=x
y=argch(x) =ln(x + sqrt(x^2−1))
y = argsh(x) =ln(x + sqrt(x^2+1))
y
x
2,4
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-2,4
-4,8
-4
-3,2
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
4
4,8

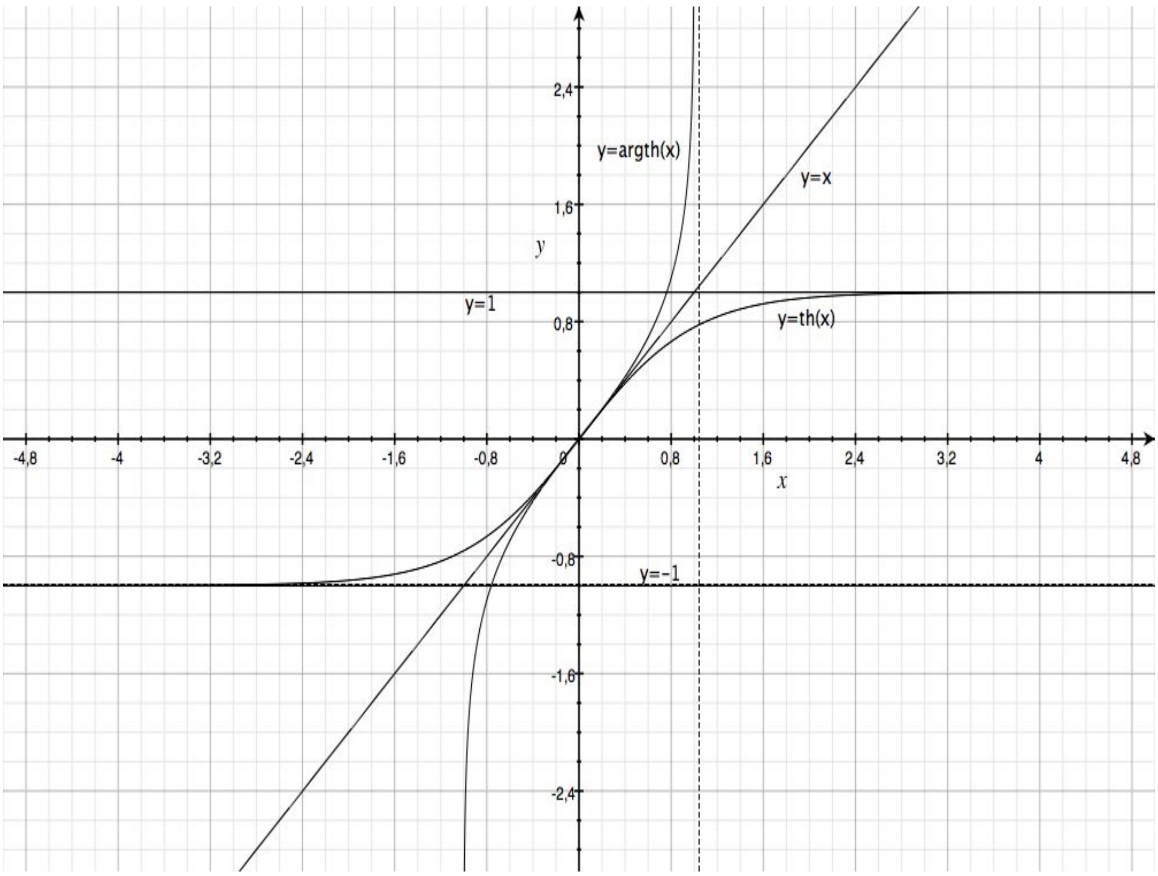
9. Comme th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} th(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} th(x) = 1$ alors la fonction th est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1;1[$ .On appellera argument tangente hyperbolique que l'on notera $argth$ la bijection réciproque de la fonction th

10. On démontre que pour tout $y \in \,]-1;1[$ l'on a $th\left(\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) = y$ donc

$$\boxed{argth(y) = \frac{1}{2}ln\left(\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right.}$$

11. $argth$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car th' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(argth)'(y) = \left(\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)' = \frac{1}{1-y^2}}$$



2.15.5 Quelques propriétés

On démontre les formules suivantes pour tous réels a et b l'on a :

1. $$\boxed{ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)}$$

2. $$\boxed{sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)}$$

3. $$\boxed{th(a+b) = \frac{th(a)+th(b)}{1+th(a)th(b)}}$$

On en déduit les formules de multiplication des arcs :

$$\boxed{ch(2a) = ch(a+a) = ch^2(a) + sh^2(a) = 2ch^2(a) - 1 = 1 + 2sh^2(a)}$$

car $ch^2(a) - sh^2(a) = 1$

$$\boxed{sh(2a) = 2sh(a)ch(a)}$$

et

$$\boxed{th(2a) = \frac{2th(a))}{1+th^2(a)}}$$

Démontrer alors que

$$\boxed{ch(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \text{ avec } t = th\left(\frac{x}{2}\right)}$$

;

$$\boxed{sh(x) = \frac{2t}{1-t^2} \text{ avec } t = th\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et

$$\boxed{th(x) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ avec } t = th\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1. Au voisinage de $+\infty$ on a $ch(x) \sim \frac{1}{2}e^x$ et $sh(x) \sim \frac{1}{2}e^x$
2. Au voisinage de $-\infty$ on a $ch(x) \sim \frac{1}{2}e^{-x}$ et $sh(x) \sim -\frac{1}{2}e^{-x}$
3. La fonction $x \mapsto sh(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto ch(x) - 1$. Par conséquent comme $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $1 \leq ch(x)$ alors la dérivée est positive donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$. Or elle vaut 0 en $x = 0$ donc pour tout réel $x \geq 0$, on a : $sh(x) - x \geq 0$ donc $\boxed{x \leq sh(x)}$
4. (a) soit $m(x) = ch(x) - (1 + \frac{x^2}{2})$ Alors $m'(x) = sh(x) - x$ donc pour tout réel $x \geq 0$ l'on a $m'(x) \geq 0$. Donc m est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $m(0) = 0$. Donc pour tout réel $x \geq 0$ on a $m(x) \geq 0$ donc pour tout réel $x \geq 0$ on a $\boxed{1 + \frac{x^2}{2} \leq ch(x)}$.

(b) soit $n(x) = sh(x) - (x + \frac{x^3}{6})$ Alors $n'(x) = ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$ donc pour tout réel $x \geq 0$ l'on a $n'(x) \geq 0$ d'après la question précédente. Donc n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $n(0) = 0$. Donc pour tout réel $x \geq 0$ on a $n(x) \geq 0$ donc $\boxed{x + \frac{x^3}{6} \leq sh(x)}$

5. Sur $[0; 1]$ on a :

(a) la fonction p définie par $p(x) = 2x - sh(x)$ qui est dérivable et qui a pour nombre dérivé $2 - ch(x)$.
Or $\forall x \in [0; 1]$ on a : $1 \leq ch(x) \leq ch(1) \approx 1,54$ donc $\forall x \in [0; 1]$ on a : $2 - ch(x) > 0$. La fonction p est donc croissante sur $[0; 1]$ et par conséquent $p(x) \geq p(0)$ avec $p(0) = 0$ donc $2x \geq sh(x)$ donc $\boxed{sh(x) \leq 2x}$.

(b) la fonction q définie par $q(x) = 1 + x^2 - ch(x)$ qui est dérivable et qui a pour nombre dérivé $2x - sh(x)$.
Or $\forall x \in [0; 1]$ on a : $2x \geq sh(x)$ donc $\forall x \in [0; 1]$ on a : $q'(x) \geq 0$. La fonction q est donc croissante sur $[0; 1]$ et par conséquent $q(x) \geq q(0)$ avec $q(0) = 0$ donc $1 + x^2 - ch(x) \geq 0$ donc $\boxed{ch(x) \leq 1 + x^2}$

6. (a) Soit la fonction r définie par $r(x) = x + \frac{x^3}{3} - sh(x)$. Alors r est dérivable sur $[0; 1]$ de nombre dérivé $r'(x) = 1 + x^2 - ch(x) \geq 0$ donc r est croissante sur $[0; 1]$ donc $r(x) \geq r(0)$. Or $r(0) = 0$ donc $\boxed{sh(x) \leq x + \frac{x^3}{3}}$

(b) Soit la fonction s définie par $s(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - ch(x)$. Alors s est dérivable sur $[0; 1]$ de nombre dérivé $s'(x) = x + \frac{x^3}{3} - sh(x) \geq 0$ donc s est croissante sur $[0; 1]$ donc $s(x) \geq s(0)$. Or $s(0) = 0$ donc $\boxed{ch(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}}$

7. Comme, $\forall x \in [0; 1]$, $ch(x) \leq 1 + x^2$ et $ch(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$ alors

$$\boxed{0 \leq ch(x) - (1 + \frac{x^2}{2}) \leq \frac{x^4}{12} \leq \frac{1}{12}}$$

Comme, pour tout réel x compris entre 0 et 1, $x + \frac{x^3}{6} \leq sh(x)$ et $sh(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$ alors $0 \leq sh(x) - (x + \frac{x^3}{6}) \leq \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6}$ donc

$$\boxed{0 \leq sh(x) - (x + \frac{x^3}{6}) \leq \frac{x^3}{6} \leq \frac{1}{6}}$$

3 Exercices

3.1 6 ensembles de définition classiques

Compléter le tableau suivant :

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)$ est :	*alors D_f est :*
un polynôme *de variable x*	
$\dfrac{n(x)}{d(x)}$	
$\sqrt{r(x)}$	
$\ln(g(x))$	
$\exp(g(x))$	
$(g \circ f)(x)$	

si $f(x)$ est	*alors D_f est :*
un polynome	$\mathbb{R}$
$\dfrac{n(x)}{d(x)}$	$\{x \in \mathbb{R}/n(x)\ existe\ et\ d(x)\ existe\ et\ d(x) \neq 0\}$
$\sqrt{r(x)}$	$\{x \in \mathbb{R}/r(x)\ existe\ et\ r(x) \geq 0\}$
$\ln(g(x))$	$\{x \in \mathbb{R}/g(x)\ existe\ et\ g(x) > 0\}$
$\exp(h(x))$	$\{x \in \mathbb{R}/h(x)\ existe\}$
$(gof)(x)$	$\{x \in \mathbb{R}/f(x)\ existe\ et\ f(x) \in D_g\}$

3.2 Recherche d'ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions numériques d'une variable réelle x définies par :

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $g(x) = x^2 + 5x + 6$
3. $h(x) = ln(x^2 + 5x + 6)$
4. $i(x) = ln(x + 2) + ln(x + 3)$
5. $j(x) = ln(x^2 + 2x + 1)$
6. $k(x) = ln(x^2 + x + 1)$

3.3 Recherche d'ensembles de définition

1. Dessiner un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Par un point M de $[AB]$ on construit les segments $[MN]$ et $[MP]$ tels que $(MN)//(BC), N \in [AC], (MP)//(AC), P \in [BC]$
2. On pose $x = AM$ et $f(x) = AN + NM + MP + PB$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition Def de f ?
   (b) Pour tout $x \in Def$, simplifier $f(x)$.
   (c) Conclure.

3.4 Une fonction homographique particulière ♡♡♡

1. Démontrer que l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{-2\} & \to & \mathbb{R}-\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{x+2} \end{array}$$

   est bijective.
2. Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}.
3. Dessiner $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé.

L'application

$$f: \begin{array}{cccc} \mathbb{R}-\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} & \\ x & \longmapsto & f(x) & = \dfrac{2x+1}{x+2} \end{array}$$

est bijective

1. **Méthode 1 :**
   Soit $y \in \mathbb{R}-\{2\}$, $y = f(x) \Longleftrightarrow y = \dfrac{2x+1}{x+2} \Longleftrightarrow yx + 2y = 2x + 1$
   $\Longleftrightarrow x(y-2) = 1-2y \Longleftrightarrow x = \dfrac{1-2y}{y-2}$ car $y \neq 2$.
   Résolvons pour cela l'équation $\dfrac{1-2y}{y-2} = -2$.
   $\dfrac{1-2y}{y-2} = -2 \Longleftrightarrow 1-2y = -2y+4 \Longleftrightarrow 1 = 4$ impossible
   Donc l'antécédent de y qui est $\dfrac{1-2y}{y-2}$est bien un élément de $\mathbb{R}-\{-2\}$
   Par conséquent, f est bien une application bijective de $\mathbb{R}-\{-2\}$ dans $\mathbb{R}-\{2\}$ et

$$f^{-1}: \begin{array}{cccc} \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{-2\} & \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = \dfrac{-2y+1}{y-2} \end{array}$$

2. **Méthode 2 :**

   (a) $D_f = \mathbb{R}-\{-2\} =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$
   (b) f est une fonction fraction rationnelle donc f est dérivable donc continue sur son ensemble de définition
   (c) $\forall x \in D_f$ l'on a : $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ donc $f'(x) > 0$. Par conséquent f est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$
   (d) Comme f est une fonction rationnelle alors les limites à l'infini sont les limites à l'infini du rapport des termes de plus haut degré. Par conséquent,

i. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2.$
Par conséquent, C_f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$
Par conséquent, C_f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

(e) i. Quand $x \to -2^-$ alors $2x+1 \to -3$ et $x+2 \to 0^-$ donc $f(x) \to +\infty$
Par conséquent, C_f admet au voisinage de -2^- une asymptote verticale d'équation $x = -2$

ii. Quand $x \to -2^+$ alors $2x+1 \to -3$ et $x+2 \to 0^+$ donc $f(x) \to -\infty$
Par conséquent, C_f admet au voisinage de -2^+ une asymptote verticale d'équation $x = -2$

(f) Voici donc le tableau de variations de f

(g) i. Comme f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ alors f réalise une bijection de $]-\infty; -2[$ sur $f<]-\infty; -2[>$ qui est $]2; +\infty[$

ii. Comme f est continue et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$ alors f réalise une bijection de $]-2; +\infty[$ sur $f<]-2; +\infty[>$ qui est $]-\infty; 2[$

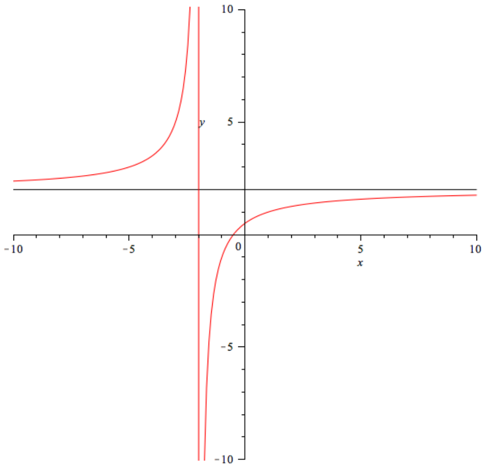
iii. De plus $f(x) = 2 \iff \dfrac{2x+1}{x+2} = 2 \iff 2x+1 = 2x+4 \iff 1 = 4$ impossible

iv. par conséquent $f < \mathbb{R} - \{-2\} >$ est $\mathbb{R} - \{2\}$ et f est une application bijective de $\mathbb{R} - \{-2\}$ sur $\mathbb{R} - \{2\}$

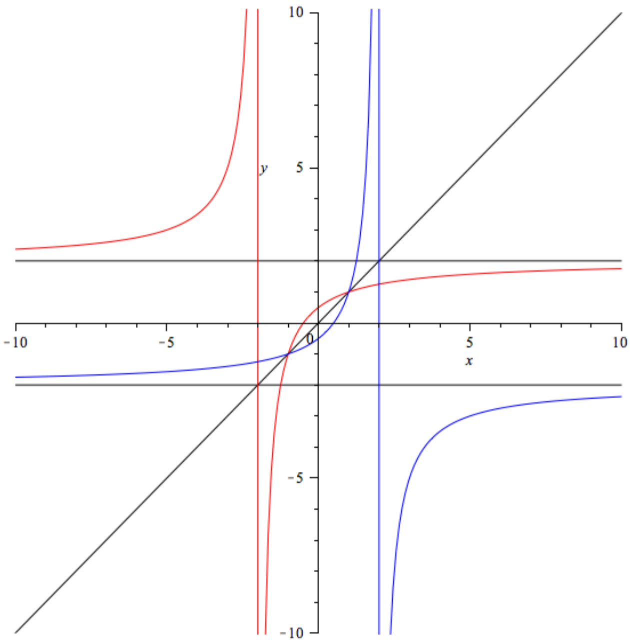
(h) D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow 2$

Voici la courbe représentative de f qui est une hyperbole de centre $\Omega(-2; 2)$ et d'axes $D_1 : y = 2$ et $D_2 : x = -2$
Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
La courbe représentative de f^{-1} est aussi une hyperbole de centre $\Omega'(2; -2)$ et d'axes $D'_1 : x = 2$ et $D'_2 : y = -2$
Ω' est le symétrique de Ω par rapport à la droite d'équation $y = x$.
D'_1 est le symétrique de D_1 par rapport à la droite d'équation $y = x$.
D'_2 est le symétrique de D_2 par rapport à la droite d'équation $y = x$.



10
5
y
-10
-5
0
5
10
x
-5
-10



10
5
y
-10
-5
0
5
10
x
-5
-10

3.5 Double et moitié

1. Soit l'application
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$
Démontrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
2. l'application
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$
est –elle bijective ? oui ou non ? pourquoi ?
3. $$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ si x est un entier pair} \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$
est –elle bijective ? oui ou non ? pourquoi ?
4. Déterminer l'application $h \ o \ g$
5. Déterminer l'application $g \ o \ h$
6. Déterminer de façon précise l'application $h \ o \ h$
7. Déterminer de façon précise l'application $h \ o \ h \ o \ h$

3.6 Fonctions et applications

1. On associe à un élément quelconque x de $\mathbb{N}$ les éléments y de $\mathbb{R}$ tels que $x = y^2$. A - t-on créé ainsi une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier.
2. On voudrait associer son inverse à un élément de $\mathbb{R}$. Peut-on créer ainsi une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier
3. Pour chacune des 6 applications suivantes , indiquez si elle est injective, surjective , bijective. Justifier. On donne $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$
   - $$\begin{array}{rccc} f_1 : & A & \to & B \\ & a & \mapsto & 1 \\ & b & \mapsto & 1 \\ & c & \mapsto & 2 \\ & d & \mapsto & 3 \end{array}$$
   - $$\begin{array}{rccc} f_2 : & A & \to & B \\ & a & \mapsto & 1 \\ & b & \mapsto & 1 \\ & c & \mapsto & 2 \\ & d & \mapsto & 2 \end{array}$$
   - $$\begin{array}{rccc} f_3 : & B & \to & A \\ & 1 & \mapsto & a \\ & 2 & \mapsto & b \\ & 3 & \mapsto & c \end{array}$$
   - $$\begin{array}{rccc} f_4 : & B & \to & A \\ & 1 & \mapsto & a \\ & 2 & \mapsto & a \\ & 3 & \mapsto & b \end{array}$$
   - $$\begin{array}{rccc} f_5 : & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a \\ & b & \mapsto & a \\ & c & \mapsto & c \\ & d & \mapsto & d \end{array}$$
   - $$\begin{array}{rccc} f_6 : & A & \to & A \\ & a & \mapsto & c \\ & b & \mapsto & d \\ & c & \mapsto & a \\ & d & \mapsto & b \end{array}$$
4. Pour chacune des 4 applications suivantes, indiquez si elle est injective, surjective , bijective Justifier.
   - $$\begin{array}{rccc} g_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
   - $$\begin{array}{rccc} g_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rccc} g_3 : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
- $$\begin{array}{rccc} g_4 : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

3.7 Composée de surjections et d'injections ♡♡♡

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soit f une application de E vers F et g une application de F vers G. Démontrer que

1. si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective
2. si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective
3. si $g \circ f$ est injective alors f est injective
4. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
5. si $g \circ f$ est injective et que f est surjective alors g est injective
6. si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective

1. Soient $x \in E$ et $x' \in E$.
   Supposons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.
   Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$.
   On en déduit que $f(x) = f(x')$ car g est injective.
   Comme l'on a $f(x) = f(x')$ et que f est injective alors $x = x'$ CQFD.
   On a ainsi démontré que $g \circ f$ est injective
2. Soit $z \in G$.
   Comme g est surjective alors $\exists y \in F \quad z = g(y)$.
   Mais l'on sait que f est surjective, alors cet $y \in F$ a au moins un antécédent $x \in E$ c'est-à-dire $\exists x \in E \quad y = f(x)$.
   Par conséquent $\exists x \in E \qquad z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.
   On a ainsi démontré que $\forall z \in G \quad \exists x \in E \qquad z = (g \circ f)(x)$. CQFD.
   On a ainsi démontré que $g \circ f$ est surjective.
3. Soient $x \in E$ et $x' \in E$.
   Supposons que $f(x) = f(x')$
   alors $g(f(x) = g(f(x'))$. Donc $g(f(x)) = g(f(x'))$.Mais $g \circ f$ est injective.
   Donc $x = x'$. CQFD. On a ainsi démontré que f est injective.
4. Soit $z \in G$.
   Comme $g \circ f$ est surjective alors $\exists x \in E \quad z = (g \circ f)(x)$.
   On a donc $\exists x \in E \quad z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
   Or $y = f(x) \in F$ on peut conclure que $\exists y \in F \quad z = g(y)$.
   On a ainsi démontré que g est surjective
5. Soient $y \in F$ et $y' \in F$.
   Supposons que $g(y) = g(y')$.
   Or f est surjective donc cet $y \in F$ a donc un antécédent $x \in E$ par f.
   De même $y' \in F$ a aussi un antécédent $x' \in E$ par f.
   On a donc $g(f(x)) = g(f(x')$ c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.
   Mais $g \circ f$ est injective donc $x = x'$ d'où $f(x) = f(x')$.
   On obtient donc $y = y$". CQFD. On a ainsi démontré que g est injective
6. Soit $y \in F$.
   Alors $z = g(y) \in G$ Comme $g \circ f$ est surjective alors tout élément z de G a au moins un antécédent x dans E par $g \circ f$.
   Donc $\exists x \in E \quad g(y) = (g \circ f)(x)$. On a donc $\exists x \in E \quad g(y) = g(f(x))$.
   Mais g est injective donc $y = f(x)$.
   On a ainsi prouvé que $\exists x \in E \quad y = f(x)$.
   Par conséquent, f est surjective

3.8 Exercice ♡♡♡

Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$.
Démontrer que : f est injective $\iff$ f est surjective.

3.8.1 Corrigé

1. $\Longrightarrow$:
   Supposons que f est injective.
   Pour démontrer que f est surjective, nous allons démontrer que

   $$\forall y \in E \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

   Soit $y \in E$ alors comme $f \circ f \circ f = f$ on obtient $f(f(f(y))) = f(y)$.
   Or f est injective donc $f(f(y)) = y$ donc $y = f(f(y))$donc $\exists x = f(y) \in E$ tel que $y = f(x)$ donc f est surjective.
2. $\Longleftarrow$:
   Supposons que f est surjective.
   Pour démontrer que f est injective, nous allons démontrer que

   $$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

   Soient $x \in E$ et $x' \in E$. Supposons que $f(x) = f(x')$.
   On a $x \in E$. or f est surjective donc $\exists \alpha \in E \quad x = f(\alpha)$.
   On a $x' \in E$. or f est surjective donc $\exists \beta \in E \quad x' = f(\beta)$
   Comme $f(x) = f(x')$ alors $f(f(\alpha)) = f(f(\beta))$ donc $f(f(f(\alpha))) = f(f(f(\beta)))$.
   Or $f \circ f \circ f = f$ donc $f(\alpha) = f(f(f(\alpha))) = f(f(f(\beta))) = f(\beta)$.
   Par conséquent, $f(\alpha) = f(\beta)$ d'où $x = x'$. CQFD.

3.9 Images et Images réciproques d'ensembles

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F.

1. Soient A et B des parties (ou des sous-ensembles) de E.
   On appelle **ensemble image** de A par f (qu'on note $f < A >$) l'ensemble des images des éléments de A par f
   (a) Démontrer que
   $$f < A \cup B > = \ f < A > \cup f < B >$$
   (b) Démontrer que
   $$f < A \cap B > \subset \ f < A > \cap f < B >$$
   Exhiber un contre-exemple prouvant que la réciproque est fausse.
   (c) Démontrer que **si** f **est injective** alors
   $$f < A \cap B > = \ f < A > \cap f < B >$$
2. Soient A' et B' des parties (ou des sous-ensembles) de F.
   On appelle **ensemble image réciproque** de A' par f (qu'on note $f^{-1} < A' >$) l'ensemble des antécédents des éléments de A' par f
3. (a) Démontrer que
   $$f^{-1} < A' \cup B' > = \ f^{-1} < A' > \cup f^{-1} < B' >$$
   (b) Démontrer que
   $$f^{-1} < A' \cap B' > = \ f^{-1} < A' > \cap f^{-1} < B' >$$

1. Soient A et B des parties (ou des sous-ensembles) de E.
   On appelle **ensemble image** de A par f (qu'on note $f < A >$) l'ensemble des images des éléments de A par f
   (a)
   - Démontrons que $f < A \cup B > \subset \ f < A > \cup f < B >$:
   - Démontrons que $f < A > \cup f < B > \subset \ f < A \cup B >$:
   - On a donc prouvé que $f < A \cup B > = \ f < A > \cup f < B >$

   (b)
   - Démontrons que $f < A \cap B > \subset \ f < A > \cap f < B >$
   - La réciproque est fausse. Voici un contre-exemple :

   (c)
   - Démontrons que **si** f **est injective** alors $f < A > \cap f < B > \subset < A \cap B >$

- Comme l'on sait déjà que $f < A \cap B > \subset \; f < A > \cap f < B >$
- On aura donc $f < A \cap B > : \; f < A > \cap f < B >$ à condition que f soit injective.

2. Soient A' et B' des parties (ou des sous-ensembles) de F.
   On appelle **ensemble image réciproque** de A' par f
   (qu'on note $f^{-1} < A' >$) l'ensemble des antécédents des éléments de A' par f
3. (a) Démontrer que

$$f^{-1} < A' \cup B' > = \; f^{-1} < A' > \cup f^{-1} < B' >$$

   (b) Démontrer que

$$f^{-1} < A' \cap B' > = \; f^{-1} < A' > \cap f^{-1} < B' >$$

3.10

Soit un ensemble E et soit A une partie de E telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$.
Soit les applications

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ & X & \mapsto & f(X) = X \cup A \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ & X & \mapsto & f(X) = X \cup A \end{array}$$

1. Démontrer que f n'est pas injective.
2. Démontrer que g n'est pas injective.
3. Démontrer que f n'est pas surjective.
4. Démontrer que g n'est pas surjective.

3.10.1 Corrigé

1. $f(A) = A \cup A = A$ et $f(\emptyset) = \emptyset \cup A = A$.
   Par conséquent, $A \neq \emptyset$ et pourtant $f(A) = f(\emptyset)$ donc f n'est pas injective.
2. $g(A) = A \cap A = A$ et $g(E) = E \cup A = A$.
   Par conséquent, $A \neq E$ et pourtant $g(A) = g(E)$ donc g n'est pas injective.
3. $\emptyset$ n'a aucun antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ pour f car il n'existera aucun X tel que $\emptyset = f(X)$ puisque $f(X) = X \cup A$ contient au moins $A \neq \emptyset$.
   Par conséquent, f n'est pas surjective.
4. E n'a aucun antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ pour g car il n'existera aucun X tel que $E = g(X)$ puisque $g(X) = X \cap A \subset A \neq E$. Donc pour tout $X \in \mathcal{P}(E) \quad g(X) \neq E$ Par conséquent, g n'est pas surjective.

3.11

Démontrer que l'application suivante est surjective

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si n pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si n impair} \end{cases} \end{array}$$

3.11.1 Corrigé

Soit $y \in \mathbb{N}$. Alors de 2 choses l'une :
ou bien y est pair donc $\exists k \in \mathbb{N} \quad y = 2k$ alors $f(4k) = \dfrac{4k}{2} = 2k = y$
ou bien y est impair donc $\exists k \in \mathbb{N} \quad y = 2k + 1$
alors $f(4k+3) = \dfrac{4k+3-1}{2} = \dfrac{4k+2}{2} = 2k + 1 = y$
Dans tous les cas, tout $y \in \mathbb{N}$ a au moins un antécédent par f dans $\mathbb{N}$ donc f est surjective.

3.12 Exercice

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = (-x, x+y, y) \end{array}$$

Soit l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & g(x,y,z) = (x+2y, -y+z) \end{array}$$

1. Démontrer que f est injective, non surjective
2. Démontrer que g est surjective et non injective
3. (a) Déterminer $g\ o\ f$
   (b) Démontrer que $g\ o\ f$ est bijective
   (c) Déterminer alors l'application $(g\ o\ f)^{-1}$

3.12.1 Corrigé

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = (-x, x+y, y) \end{array}$$

Soit l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & g(x,y,z) = (x+2y, -y+z) \end{array}$$

1. (a) f est injective car : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$
   $f(x,y) = f(x',y') \Longrightarrow (-x, x+y, y) = (-x', x'+y', y') \Longrightarrow x = x'$ et $y = y' \Longrightarrow (x,y) = (x',y')$
   (b) f n'est pas surjective car la résolution du système suivant n'aboutit pas toujours à au moins une solution en (x,y) :
   en effet soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$
   $(\alpha,\beta,\gamma) = f(x,y) \Longleftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma) = (-x, x+y, y) \Longleftrightarrow x = \alpha$ et $y = \gamma$ et $x+y = \beta \Longleftrightarrow x = \alpha$ et $y = \gamma$ et $\alpha + \gamma = \beta$.
   Or il existe des triplets (α,β,γ) tels que $\alpha+\gamma \neq \beta$ par exemple $(0,1,0)$.
   Ces triplets n'auront donc pas d'antécédent (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Par conséquent f n'est pas surjective.
   (c) f est injective et non surjective donc f n'est pas bijective.

   ,
2. (a) g est non injective car $(0,0,0) \neq (-2,1,1)$ et pourtant $g(0,0,0) = (0,0)$ et $g(-2,1,1) = (0,0$
   (b) g est surjective car la résolution du système suivant aboutit toujours à au moins une solution en (x,y,z) :
   en effet soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
   $(\alpha,\beta) = g(x,y,z) \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) = (x+2y, -y+z) \Longleftrightarrow x+2y = \alpha$ et

$\beta = -y + z \iff x = \alpha - 2y$ et $z = \beta + y$ et $y \in \mathbb{R}$
Donc il existe une infinité de triplets (x, y, z) solutions

(c) g est non injective et surjective donc g n'est pas bijective.

3. (a) $g\ o\ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tellle que
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ g\ o\ f(x, y) = g(f(x, y)) = g((-x, x + y, y)) = (-x + 2(x + y), -(x + y) + y) = (x + 2y, -x)$

(b) $g\ o\ f$ est bijective car
soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
$(\alpha, \beta) = g(f(x, y)) \iff (\alpha, \beta) = (x + 2y, -x) \iff x + 2y = \alpha$ et $\beta = -x \iff x = -\beta$ et $y = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$
Donc il existe un seul couple (x, y) solution

(c) Alors l'application $(g\ o\ f)^{-1} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ telle que : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\ (g\ o\ f)^{-1}(\alpha, \beta) = (-\beta, \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta))$

3.13 Deug Paris 7 - 1977

Soit f une fonction d'une variable réelle dérivable sur un intervalle $I =]a\ ;\ b[$ avec $a < b$ telle que sa dérivée f' est continue sur I.
Soit $x_0 \in I$ telle que $f'(x_0) \neq 0$.
Démontrer qu'il existe un intervalle $J =]c\ ;\ d[\subset I$ telle que $x_0 \in J$ et un intervalle $J' =]c'\ ;\ d'[$ contenant $f(x_0)$ tels que f réalise une bijection de J sur J'.

- Comme $f'(x_0) \neq 0$ et que f' est continue sur I et que $x_0 \in I$ alors il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 tel que $\forall x \in J \quad f'(x) \neq 0$.
- Sur cet intervalle J on a f' qui ne peut changer de signe sinon $\exists x_1 \in J \quad f'(x_1) = 0$
- Par conséquent, f est strictement monotone sur J
- De plus f est continue sur J car f est dérivable donc continue sur I et $J \subset I$
- Alors f réalise une bijection de J sur l'intervalle $J' = f < J >$
- Comme $x_0 \in J$ et que f est continue sur J alors $f(x_0) \in J'$. J' est un intervalle ouvert $]c'\ ;\ d'[$ car f est strictement monotone sur J

3.14 Fonction caractéristique

Soit un ensemble non vide E.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0;1\}$.
Soient A et B des parties de E.
On appelle fonction caractéristique de la partie A l'application suivante notée χ_A définie par :

$$\chi_A : E \longrightarrow \{0;1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

1. Démontrer que $\chi_A^2 = \chi_A$
2. Démontrer que $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$
3. Démontrer que $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$
4. Que se passe-t-il si A et B sont disjoints ?
5. Démontrer que $\chi_{\overline{A}} = (1 - \chi_A)$
6. Démontrer que $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B) = \chi_1 - \chi_A \chi_B$
7. Démontrer que $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$
8. Démontrer que
$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C$
9. Démontrer que l'application ϕ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}$ qui à toute partie A associe $\phi(A) = \chi_A$ est bijective.
10. En utilisant les fonctions caractéristiques, retrouver :
    (a) la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$
    (b) les lois logiques de Morgan pour les ensembles.
    (c) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

3.14.1 Corrigé

Soit un ensemble non vide E.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0;1\}$.
Soient A et B des parties de E.
On appelle fonction caractéristique de la partie A l'application suivante notée χ_A définie par :

$$\chi_A : E \longrightarrow \{0;1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

On utilisera le résultat suivant : 2 applications f et g sont égales lorsqu'elles ont :

- le même ensemble de départ E,
- le même ensemble d'arrivée F
- et $\forall x \in E f(x) = g(x)$

1.
$$\chi_A^2 : E \longrightarrow \{0;1\}$$
$$x \mapsto \chi_A(x)\chi_A(x)) = \begin{cases} 1 \times 1 = 1 \; si \; x \in A \\ 0 \times 0 = 0 \; sinon \end{cases}$$

donc $\chi_A^2 = \chi_A$ car elles ont
- le même ensemble de départ E,
- le même ensemble d'arrivée $\{0;1\}$
- et $\forall x \in E\ \chi_A^2(x) = \chi_A(x)$

2. $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$ car elles ont
   - le même ensemble de départ E,
   - le même ensemble d'arrivée $\{0;1\}$
   - et $\forall x \in E\ \chi_{A\cap B}(x) = (\chi_A\chi_B)(x)$ puisque
     - ou bien $x \in A\cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$. On a bien $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ et $(\chi_A\chi_B)(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) = 1 \times 1 = 1$
     - ou bien $x \notin A\cap B$ donc $x \notin A$ ou $x \notin B$ On a bien $\chi_{A\cap B}(x) = 0$ et $(\chi_A\chi_B)(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) = 0$ car soit $(\chi_A)(x) = 0$ soit $(\chi_B)(x) = 0$
3. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ car elles ont
   - le même ensemble de départ E,
   - le même ensemble d'arrivée $\{0;1\}$
   - et $\forall x \in E\ \chi_{A\cup B}(x) = (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x)$ puisque
     - ou bien $x \in A\cup B$ donc $x \in A$ ou $x \in B$. On a bien $\chi_{A\cup B}(x) = 1$ Mais alors $(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = 1$ car
       - ou bien $x \in A$ et $x \notin B$ donc $(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1$
       - ou bien $x \notin A$ et $x \in B$ donc $(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 0 + 1 - 0 = 1$
       - ou bien $x \in A$ et $x \in B$ donc $(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1$
     - ou bien $x \notin A\cup B$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$ On a bien $\chi_{A\cup B}(x) = 0$ Mais alors $(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 0 + 0 - 0$
4. Si A et B sont disjoints alors $A\cap B = \emptyset$. Or $\chi_\emptyset$ est la fonction nulle définie sur E donc $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$
5. χ_E est la fonction constante 1 définie sur E.
   Alors $1 = \chi_E = \chi_{A\cup\overline{A}} = \chi_A + \chi_{\overline{A}} - \chi_{A\cap\overline{A}} = \chi_A + \chi_{\overline{A}} - \chi_\emptyset = \chi_A + \chi_{\overline{A}} - 0$
   donc $\chi_{\overline{A}} = (1 - \chi_A)$
6. Comme $A\backslash B = A\cap\overline{B}$ on a donc $\chi_{A\backslash B} = \chi_{A\cap\overline{B}} = \chi_A\chi_{\overline{B}} = \chi_A(1 - \chi_B) = \chi_A - \chi_A\chi_B$
7. $\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\cup B)/(A\cap B)} = \chi_{A\cup B} - \chi_{A\cup B}\chi_{A\cap B}$
   $= (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}) - (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})\chi_A\chi_B$
   $= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B - \chi_A^2\chi_B - \chi_B\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_A$
   $= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B - \chi_A^2\chi_B - \chi_A\chi_B^2 + \chi_A^2\chi_B$
   $= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$
8. $\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta B} + \chi_C - 2\chi_{A\Delta B}\chi_C$
   $= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C$
   $= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C$
9. Soit g une application de E dans $\{0;1\}$. Soit $C = g^{-1}(1) =$ l'ensemble des antécédents de 1 dans E par g. Alors $\chi_C = g$ par construction donc tout élément g de $\mathcal{F}$ a au moins un antécédent C dans $\mathcal{P}(E)$ donc ϕ est surjective.

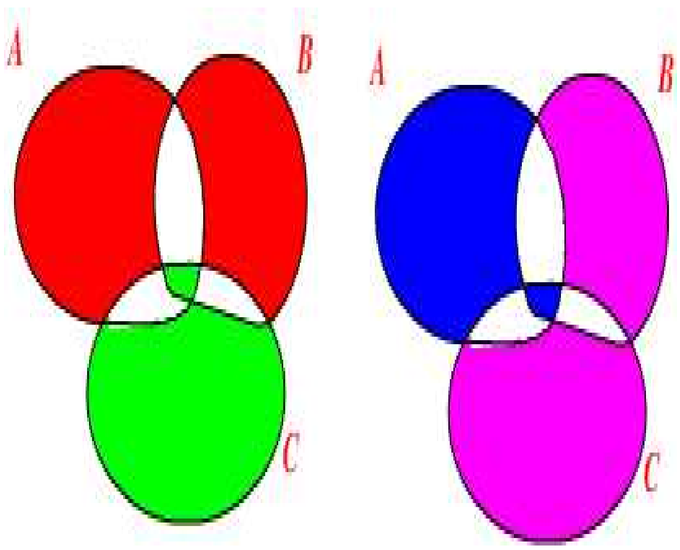
De plus ϕ est injective car $\phi(A) = \phi(B) \Longrightarrow \chi_A = \chi_B \Longrightarrow A = B$ Par conséquent l'application ϕ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}$ qui à toute partie A associe $\phi(A) = \chi_A$ est surjective et injective donc bijective.

10. En utilisant la bijectivité de ϕ on retrouve :
    (a) la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$ car $\chi_{A\cap(B\cup C)} = \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$
    (b) la distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$ car $\chi_{A\cup(B\cap C)} = \chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$
    (c) les lois logiques de Morgan pour les ensembles car
      - $\chi_{\overline{A\cap B}} = \chi_{\overline{A}\cup\overline{B}}$
      - $\chi_{\overline{A\cup B}} = \chi_{\overline{A}\cap\overline{B}}$
11. En changeant A en B,B en C et C en A dans la formule :

$$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C$$

    on obtient : $\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{(B\Delta C)\Delta A}$
    Par conséquent, comme $\chi_{X\Delta Y} = \chi_{Y\Delta X}$, on obtient $\chi_{(B\Delta C)\Delta A} = \chi_{A\Delta(B\Delta C)}$
    d'où on déduit que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Cette associativité de la différence symétrique s'illustre facilement :
$(A\Delta B)\Delta C = (A\Delta B)/C \cup C/(A\Delta B)$
$A\Delta(B\Delta C) = (A/(B\Delta C) \cup (B\Delta C)/A$



3.15 Homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$

Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Etudier la continuité de f sur D_f.
3. Etudier la dérivabilité de f sur D_f
4. En déduire que f est strictement croissante sur D_f
5. Démontrer que f est une application bijective de D_f sur un intervalle J à déterminer
6. Définir la bijection réciproque f^{-1}. (on admet quef^{-1} est continue)
7. Dessiner les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

f est donc une application bijective et bicontinue donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$.

3.16 Bijection

Soit la fonction numérique d'une variable réell

$$f : \begin{array}{ccc} [3\,;+\infty[& \longrightarrow & [5\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x-3}+5 \end{array}$$

1. Démontrer que f est une application bijective de $[3\,;+\infty[$ sur $[5\,;+\infty[$.
2. Définir sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Tracer alors la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormé.
4. En déduire le tracé de la courbe de f dans ce même repère orthonormé.

3.17 Exercice

Démontrer que l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & f((a,b)) = a+b\sqrt{2} \end{array}$$

est injective.

3.17.1 Corrigé

Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}^2, (a',b')\in\mathbb{Z}^2$ tels que $f((a,b)) = f((a',b'))$
Alors $a+b\sqrt{2} = a'+b'\sqrt{2}$ donc $(a-a')+(b-b')\sqrt{2} = 0$.

- ou bien $b-b'\neq 0$ donc $\sqrt{2} = \dfrac{a-a'}{b-b'}$. Or $a-a'\in\mathbb{Z}$ et $b-b'\in\mathbb{Z}^*$ donc $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Impossible.
- ou bien $b-b'=0$ donc $a-a'=0$ d'où $a=a'$ et $b=b'$ donc $(a,b)=(a',b')$.

Donc $(a,b)=(a',b')$ donc f est injective.

3.18 Exercice - Ensi 87

Soit ρ une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sigma(x) = x\rho(x)$

3.19 Exercice

L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = Sup\left(\dfrac{x+10}{5}\ ;\ x-3\right) \end{array}$$

est-elle bijective ?
Si oui, déterminer sa bijection réciproque.

3.20 Exercice

L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow &]-\infty;0]\cup]1;+\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4} \end{array}$$

est-elle bijective ? Si oui, déterminer sa bijection réciproque.

3.21 Exercice

L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y = (x+y\ ;\ x-y) \end{array}$$

est-elle bijective ?
Si oui, déterminer sa bijection réciproque.

3.22 Exercice

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x^2 - y \end{array}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

1. f n'est pas injective car il existe $(0,0) \neq (1,1)$ et $f(0,0) = f(1,1)$ puisque $f(0,0) = 0^2 - 0 = 0$ et $f(1,1) = 1^2 - 1 = 0$
2. f sera surjective
   si tout élément $\alpha \in \mathbb{R}$ a au moins un antécédent $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire qu'on peut trouver un couple (x,y) tel que $\alpha = f(x,y) = x^2 - y$.
   Or $\alpha = x^2 - y \iff x^2 = \alpha + y$.
   Comme un carré est positif ou nul il faut que $\alpha + y \geq 0$ dans ce cas
   $$\alpha = x^2 - y \iff x^2 = \alpha + y \iff x = -\sqrt{\alpha + y} \text{ ou } x = \sqrt{\alpha + y}$$
   Donc en choisissant (x,y) avec $\begin{cases} y \geq -\alpha \\ x = \sqrt{\alpha + y} \end{cases}$ on pourra avoir $f(x,y) = \alpha + y - y = \alpha$

3.23 Exercice

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & f(x) = (e^x \ , \ x+2) \end{array}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

1. f est injective car :
   $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x' \in \mathbb{R}$
   $$f(x) = f(x') \Longrightarrow (e^x \ , \ x+2) = (e^{x'} \ , \ x'+2) \Longrightarrow \begin{cases} e^x = e^{x'} \\ x+2 = x'+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x' \\ x = x' \end{cases} \Longrightarrow x = x'$$
   car la fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$
2. f n'est pas surjective car il existe (α, β) avec $\alpha \leq 0$ qui ne peut être l'image d'un réel x car on ne peut avoir $\alpha = e^x$ puisque $e^x > 0$ et $\alpha \leq 0$

3.24 Exercice

Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+3} \end{array}$$

1. Démontrer que f n'est pas bijective.
2. Déterminer alors F un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+3} \end{array}$$

réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur F.

1. • f est injective car $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}'$

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow \frac{e^x+1}{e^x+3} = \frac{e^{x'}+1}{e^{x'}+3} \Longrightarrow (e^x+1)(e^{x'}+3) = (e^{x'}+1)(e^x+3)$$

$$\Longrightarrow e^{x+x'}+3e^x+e^{x'}+3 = e^{x'+x}+1e^x+3e^{x'}+3 \Longrightarrow 2e^x = 2e^{x'} \Longrightarrow e^x = e^{x'} \Longrightarrow x = x'$$

car la fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < 0$ car $e^x+1 > 0$ et $e^x+3 > 0$ puisque $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$.
Par conséquent, il existe $y < 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad y \neq f(x)$ donc f n'est pas surjective.

• f étant injective mais n'étant pas surjective ne peut être bijective.

2. • f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x+3)-(e^x+1)e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+3)^2} > 0$$

• — $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+3} = \lim_{x\to+infty} \frac{e^x+1}{e^x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{3}{e^x}} = 1$

— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x+1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x+3 = 3$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

• On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

• f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $F = \left]\frac{1}{3}\,;1\right[$