Dérivation

Christian CYRILLE

17 décembre 2025

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Développement limité d'ordre 1

1.1 Activité

Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Alors $f(0) = 1$.
On aimerait avoir une valeur approchée de $f(0,03) = \dfrac{1}{1,03}$.

Pour tout $x \neq -1$, on sait que $1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$
Donc $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{x^3}{1+x} = \dfrac{1+x^3}{1+x} = \dfrac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = x^2 - x + 1$
D'où $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2[-\dfrac{x}{1+x}]$
On a donc $f(x) = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{-x}{1+x} = 0$

- On dit alors que $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
- **Le polynôme du second degré $1 - x + x^2$ s'appelle la partie régulière du développement limité et $x^2\varepsilon(x)$ s'appelle la partie complémentaire de ce développement limité.**

$x^2\varepsilon(x) = o(x^2)$ d'où $\dfrac{1}{1,03} \approx (0,03)^2 - 0,03 + 1 \approx 0,9709$.
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{1+x} = 1 - x + x(x - \dfrac{x^2}{1+x}) = 1 - x + x\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = x - \dfrac{x^2}{1+x}$ avec $\lim\limits_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} x - \dfrac{x^2}{1+x} = 0$ donc $x\varepsilon(x) = xo(1) = o(x)$.

- On dit alors que $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.
- Le polynôme du premier degré $1 - x$ s'appelle la partie régulière du développement limité et $x\varepsilon(x)$ s'appelle la partie complémentaire de ce développement limité.

$\dfrac{1}{1,03} \approx 1 - 0,03 \approx 0,97$

1.2 Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de centre x_0 **sauf peut être en** x_0.
On dit que f admet en x_0 un développement limité à l'ordre n (où $\in \mathbb{N}^*$) en x_0 lorsqu'il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\boxed{\forall x \in I - \{x_0\},\ f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des coefficients réels avec $a_n \neq 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \varepsilon(x) = 0$.
On peut écrire $(x - x_0)^n\varepsilon(x) = (x - x_0)^n o(1) = o(x - x_0)^n$.

1. Le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle la partie régulière du développement limité
2. $(x - x_0)^n\varepsilon(x)$ s'appelle le reste ou la partie complémentaire.

Quand x tend vers x_0 alors

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

.

2 Dérivation

2.1 Définition

On dit que f est dérivable en x_0 lorsque

1. f est définie sur un intervalle centré de centre x_0
2. $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ où L est un nombre réel fini.

Ce nombre L se note $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.

2.2 Remarques

1. Si f n'est pas définie en x_0 alors f n'est pas dérivable en x_0
2. Si $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est infinie ou n'existe pas alors f n'est pas dérivable en x_0

2.3 Propriétés

2.3.1 Lien entre dérivabilité et développement limité d'ordre 1

> **f dérivable en $x_0 \Longleftrightarrow f$ est définie en x_0 et f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0.**
> **Dans ce développement limité :** $a_0 = f(x_0)$ **et** $a_1 = f'(x_0)$.

Démonstration :
$\Longrightarrow$:
Si f est dérivable en x_0 et de nombre dérivé $L = f'(x_0)$alors :

- f est continue en x_0
- De plus, soit la fonction ϕ définie sur un intervalle ouvert épointé de centre x_0 par :
  $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L$. Alors $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \phi(x) + L$ donc
  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\phi(x) + L(x - x_0)$ donc
  $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + (x - x_0)\phi(x)$. avec $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \phi(x) = 0$
  Car $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ puisque f est dérivable en x_0
  Par conséquent, f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 avec $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

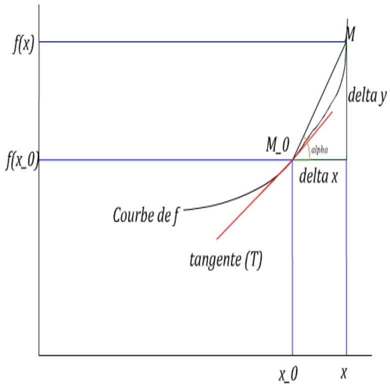
$\Longleftarrow$:
Soit f tel que $f(x_0)$ existe et f admet au voisinage de x_0 un développement limité d'ordre 1 :
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \varepsilon(x) = 0$
Alors $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Q(x)$
Or $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = a_0$. Or f est définie en x_0 donc $a_0 = f(x_0)$.
$Q(x) = \dfrac{a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) - a_0}{x - x_0} = \dfrac{a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)}{x - x_0}$
Donc $Q(x) = a_1 + \varepsilon(x)$.
Par conséquent, comme $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto x_0} Q(x) = a_1$.
Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$.

2.3.2 Corollaire

> Si f est dérivable en x_0 alors au voisinage de x_0
> $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \varepsilon(x) = 0$
> d'où $\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$.
> On approche f par une fonction affine $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0.

2.3.3 Interprétation graphique du nombre dérivé

Du Corollaire précédent, on tire une conséquence graphique :
Si f est dérivable en x_0 alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une tangente $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



La pente ou le coefficient directeur de la droite (M_0M) est :
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_M - y_{M_0}}{x - x_0} = tan(\alpha)$.
Comme f est dérivable en x_0 alors le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_M - y_{M_0}}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ quand x tend vers x_0.
Alors la droite (M_0M) tend vers une position limite qui est la droite (T) tangente à la courbe représentative de f en M_0. Cette droite (T) a donc pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

2.3.4 Corollaire : lien entre dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

démonstration :
Comme f est dérivable en x_0 alors f est définie au voisinage de x_0 et $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \varepsilon(x) = 0$
donc $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$ donc f est continue en x_0.

2.3.5 Attention !

La réciproque est fausse : par exemple la fonction valeur absolue *abs* est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

En effet, $\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{\mid x \mid - \mid 0 \mid}{x - 0} = \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{x}{x} = 1$ est différente de
$\lim_{x \mapsto 0^-} \frac{\mid x \mid - \mid 0 \mid}{x - 0} = \lim_{x \mapsto 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

2.4 Dérivabilité à droite et dérivabilité à gauche en un point

On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque

1. f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + h[$
2. $\lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$

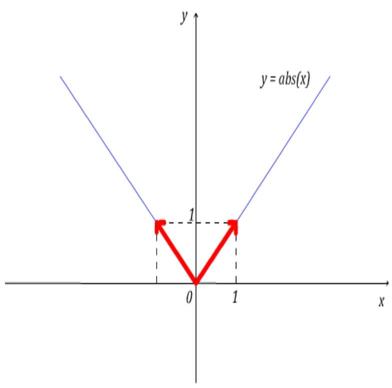
Ce nombre L se note $f'_d(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f à droite en x_0.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque

1. f est définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - h; x_0]$
2. $\lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$

Ce nombre L se note $f'_g(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f à gauche en x_0

2.4.1 Exemple

La fonction valeur absolue *abs* est dérivable à droite en 0.
En effet, $\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{\mid x \mid - \mid 0 \mid}{x - 0} = \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{x}{x} = 1$
Son nombre dérivé à droite en 0 est $f'_d(0) = 1$ La fonction valeur absolue *abs* est dérivable à gauche en 0.
En effet, $\lim_{x \mapsto 0^-} \frac{\mid x \mid - \mid 0 \mid}{x - 0} = \lim_{x \mapsto 0^-} \frac{-x}{x} = -1$
Son nombre dérivé à gauche en 0 est $f'_g(0) = -1$.
Mais comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Sa courbe n'admet pas de tangentes en 0 mais un point anguleux avec deux demi-tangentes de pentes différentes.



2.4.2 Théorème

f est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f'(x_0) = L \iff f$ est dérivable à gauche en x_0 et dérivable à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = L$

2.4.3 Points anguleux

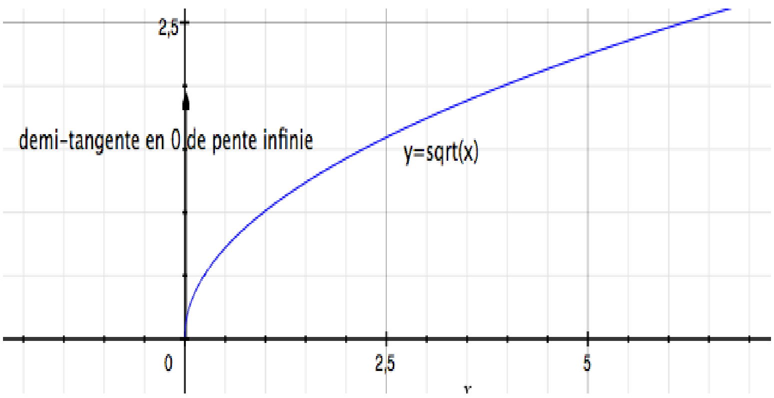
Si f est dérivable à droite en x_0 avec comme nombre dérivé à droite $f'_d(x_0)$ alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi- tangente à droite définie par le système suivant formé d'une équation et d'une inéquation

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

Si f est dérivable à gauche en x_0 avec comme nombre dérivé à gauche $f'_g(x_0)$ alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi- tangente à gauche définie par le système suivant formé d'une équation et d'une inéquation $\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$ Si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors on dit que $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux.

2.4.4 Demi-tangentes de pente infinie

Si $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en x_0 mais C_f admet tout de même une demi-tangente à droite en $M_0(x_0; f(x_0))$ parallèle à l'axe des ordonnées.
Si $\lim\limits_{x \mapsto x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche en x_0 mais C_f admet tout de même une demi-tangente à gauche en $M_0(x_0; f(x_0))$ parallèle à l'axe des ordonnées.
Exemple :
$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$



2.5 Approximations des carrés, cubes, inverses et racines carrées par des fonctions affines

2.5.1 Approximation de x^2 au voisinage de 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On désirerait étudier des valeurs de $f(x)$ au voisinage de 1, pour cela on pose $x = 1 + h$ où h est très petit.

1. Calculer alors x^2
2. A l'aide d'une calculatrice, on obtient le tableau suivant :

x	$1+10^{-2}$	$1+10^{-3}$	$1+10^{-4}$	$1+10^{-5}$
$x^2=(1+h)^2$	$1,0201$	$1,002001$	$1,00020001$	$1,0000200001$
$1+2h$	$1,02$	$1,002$	$1,0002$	$1,00002$

x	$1-10^{-2}$	$1-10^{-3}$	$1-10^{-4}$	$1-10^{-5}$
$x^2=(1+h)^2$	$0,9801$	$0,998001$	$0,99980001$	$0,9999800001$
$1+2h$	$0,98$	$0,998$	$0,9998$	$0,99998$

   On constate que lorsque $\mid h \mid$ est assez petit alors $(1+h)^2 \approx 1+2h$

3. L'erreur commise est $e(h) = (1+h)^2 - (1+2h) = h^2$
4. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ l'on a $(x_0+h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$.
   Alors lorsque $\mid h \mid$ est assez petit alors $(x_0+h)^2 \approx x_0^2 + 2x_0h$
5. On a $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \dfrac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h$
   donc $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} 2x_0 + h = 2x_0 = f'(x_0)$

2.5.2 Approximation de x^3 au voisinage de 1

1. $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$.
2. Alors si l'on approxime $(1+h)^3$ par $1+3h$ alors l'erreur commise est $e(h) = (1+h)^3 - 1 + 3h) = 3h^2 + h^3 = h^2(3+h)$
3. Par conséquent, si $\mid h \mid < 1$ alors $h^2 < 1$ et $\mid 3+h \mid < \mid 3 \mid + \mid h \mid = 3+ \mid h \mid < 3+1 = 4$ donc $\mid e(h) \mid = \mid h^2(3+h) \mid = \mid h^2 \mid \mid 3+h \mid < 4h^2$

2.5.3 Approximation de $\frac{1}{x}$ au voisinage de 1

A l'aide d'une calculatrice, on obtient le tableau suivant :

h	10^{-4}	10^{-5}	-10^{-4}	-10^{-5}
$-h$	-10^{-4}	-10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}
$1-h$	$0,9999$	$0,99999$	$1,0001$	$1,00001$
$x=1+h$	$1,0001$	$1,00001$	$0,9999$	$0,99999$
$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+h}$	$0,999900009999$	$0,9999900001$	$1,00010001$	$1,0000100001$

1. On peut donc approximer $\dfrac{1}{1+h}$ par $1-h$ avec une erreur
$e(h) = \dfrac{1}{1+h} - (1-h) = \dfrac{1-(1-h)(1+h)}{1+h} = \dfrac{h^2}{1+h}$
2. Supposons que $\mid h \mid < \dfrac{1}{2}$ alors $-\dfrac{1}{2} < h < \dfrac{1}{2}$ donc $1-\dfrac{1}{2} < 1+h < 1+\dfrac{1}{2}$
donc $\dfrac{1}{2} < 1+h$ d'où $2 > \dfrac{1}{1+h}$. Par conséquent $e(h) = \dfrac{h^2}{1+h} < 2h^2$
3. On a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x_0+h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} = \dfrac{\dfrac{x_0-x_0-h}{x_0(x_0+h)}}{h} = \dfrac{-h}{hx_0(x_0+h)} = \dfrac{-1}{x_0(x_0+h)}$
Donc $\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{-1}{x_0(x_0+h)} = \dfrac{-1}{x_0^2} = f'(x_0)$

2.5.4 Approximation de $\sqrt{x}$ au voisinage de 1

1. Soit $x_0 > 0$.
On a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \dfrac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \dfrac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} =$
$\dfrac{h}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$
Alors $\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$
2. On va approximer $f(x_0+h)$ par $f(x_0) + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}h$ donc pour $x_0 = 1$ on a :
$f(1+h) \approx f(1) + \dfrac{1}{2\sqrt{1}}h$ donc $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$.
3. Alors l'erreur commise est
$e(h) = \sqrt{1+h} - (1+\dfrac{h}{2}) = \dfrac{1+h-(1+\dfrac{h}{2})^2}{\sqrt{1+h}+(1+\dfrac{h}{2})} = \dfrac{-h^2}{4(\sqrt{1+h}+1+\dfrac{h}{2})}$.
Soit $\mid h \mid < 1$ alors $-1 < h < 1$ donc $-1 < h$ d'où $0 < 1+h$. On en déduit que $0 < \sqrt{1+h}$
donc $1+\dfrac{h}{2} < 1+\dfrac{h}{2}+\sqrt{1+h}$.
De même, comme $-1 < h$ on a $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{h}{2}$ donc $1-\dfrac{1}{2} < 1+\dfrac{h}{2}$ d'où $\dfrac{1}{2} < 1+\dfrac{h}{2}$.
Par conséquent, $\dfrac{1}{2} < 1+\dfrac{h}{2}+\sqrt{1+h}$ d'où $4(\sqrt{1+h}+1+\dfrac{h}{2}) > 2$.
On en déduit que $\mid e(h) \mid < \dfrac{h^2}{2}$.
En résumé :

Pour	le réel	est approché par	avec une erreur inférieure à
$h \in \mathbb{R}$	$(1+h)^2$	$1+2h$	h^2
$\mid h \mid < 1$	$(1+h)^3$	$1+3h$	$4h^2$
$\mid h \mid < \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{1+h}$	$1+h$	$2h^2$
$\mid h \mid < 1$	$\sqrt{1+h}$	$1+\dfrac{h}{2}$	$\dfrac{h^2}{2}$

Comment et pourquoi se ramener au voisinage de 1 et ne pas rester au voisinage de x_0 ?
Exemple : Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{90002}$

(a) On pourrait procéder ainsi : $\sqrt{x_0+h} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}h$ d'où
$\sqrt{90002} \approx \sqrt{90000} + \frac{1}{2\sqrt{90000}}2.$
Par conséquent, $\sqrt{90002} \approx 300 + \frac{1}{300} \approx 300,00333$ mais nous ne maîtrisons pas l'erreur.

(b) Par contre pour $x_0 > 0$ si l'on décompose
$\sqrt{x_0+h} = \sqrt{x_0(1+\frac{h}{x_0})} = \sqrt{x_0}\sqrt{(1+\frac{h}{x_0})}$
on peut alors se ramener au voisinage de 1.
D'où $\sqrt{90002} = \sqrt{90000+2} = \sqrt{90000(1+\frac{2}{90000})} = \sqrt{90000}\sqrt{(1+\frac{2}{90000})}$
Alors comme $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$ alors
$\sqrt{(1+\frac{2}{90000})} \approx 1 + \frac{2}{2(90000)} = 1 + \frac{1}{90000}.$
Donc $\sqrt{90002} \approx 300(1+\frac{1}{90000}) = 300 + \frac{1}{300} \approx 300,00333.$
Mais ici nous pouvons maîtriser l'erreur qui est inférieure à :
$300\frac{h^2}{2} = 300\frac{2}{(90000)^2} \approx 3,70 \times 10^{-8} < 10 \times 10^{-8} = 10^{-7}$

3 Fonction dérivée

3.1 Définition de la dérivabilité sur un intervalle

1. **Si I est un intervalle ouvert de la forme $]a;b[$ ou $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$ ou $]-\infty;b[$,**
   on dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout x_0 de I.
   On peut alors construire la fonction suivante
   $$f' : I \to \mathbb{R}$$
   $$x \to f'(x)$$
   $f'(x) =$ le nombre dérivé de f en x se note aussi $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dfrac{\delta f}{\delta x}$.
   Cette fonction f' s'appelle la fonction dérivée de f sur I.
2. **Si I est un intervalle de la forme $[a;b[$ (resp $[a;+\infty[$)**
   on dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ (resp $]a;+\infty[$) et f est dérivable à droite en a
3. **Si I est un intervalle de la forme $]a;b]$(resp $]-\infty;b]$)**
   on dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ (resp $]-\infty;b[$) et f est dérivable à gauche en b
4. **Si I est un intervalle de la forme $[a;b]$**
   on dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en b

3.2 Propriétés des fonction dérivables sur un intervalle ouvert

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I alors :

1. $u+v$ est dérivable sur I
   et l'on a $\boxed{\forall x \in I \qquad (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)}$
2. Pour tout réel λ, λu est dérivable sur I
   et l'on a $\boxed{\forall x \in I \qquad (\lambda u)'(x) = \lambda u'(x)}$
3. uv est dérivable sur I
   et l'on a $\boxed{\forall x \in I \qquad (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$
4. $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I à condition que v ne s'annule jamais sur I
   et l'on a $\boxed{\forall x \in I \qquad \left(\dfrac{1}{v}\right)'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}}$
5. $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I à condition que v ne s'annule jamais sur I
   et l'on a $\boxed{\forall x \in I \qquad \left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}}$

3.3 Composition

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I
- Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J
- Si $u < I > \subset J$

Alors $v\ o\ u$ est dérivable sur I et l'on a : $\boxed{\forall x \in I \ \ (v\ o\ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))}$

3.3.1 Démonstration :

Soit $x_0 = a \in I$ tel que $x = a + h \in I$ où $x - x_0 = h$.
comme u est dérivable sur I donc en a alors u admet un développement limité d'ordre 1 en a :
$u(a+h) = u(a) + hu'(a) + h\varepsilon_1(h)$ avec $\lim\limits_{h\mapsto 0} \varepsilon_1(h) = 0$
Soit $b = u(a)$. Soit k tel que $b + k \in u < I >$. Comme $u < I > \subset J$ et que v est dérivable sur J donc
$v(b+k) = v(b) + v'(b)k + k\varepsilon_2((k)$ avec $\lim\limits_{k\mapsto 0} \varepsilon_2(k) = 0$
Or quand h tend vers 0, $u(a+h)$ tend vers $u(a)$ car u est continue en a puisque u est dérivable en a donc $u(a+h) - u(a)$ tend vers 0.
Posons $k = u(a+h) - u(a)$.
On peut prendre h assez petit pour que $b + k \in u < I >$.
Alors $v(u(a) + u(a+h) - u(a))$ est de la forme $v(b+k)$ avec $b = u(a)$ et $k = u(a+h) - u(a)$.
Donc

$$v(u(a)+u(a+h)-u(a)) = v(u(a)) + v'(u(a))(u(a+h)-u(a)) + u(a+h) - u(a)\varepsilon_2(u(a+h)-u(a))$$

D'où

$$v(u(a+h)) = v(u(a)) + v'(u(a))(u'(a)h + h\varepsilon_1(h)) + (u'(a)h + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(u'(a)h + h\varepsilon_1(h))$$

$$= v(u(a)) + v'(u(a))(u'(a)h + h(v'(u(a))\varepsilon_1(h) + (u'(a) + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(u'(a)h + h\varepsilon_1(h)))$$

Notons $\varepsilon_3(h) = v'(u(a))\varepsilon_1(h) + (u'(a) + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(u'(a)h + he1(h))$.
Quand h tend vers 0 alors $\varepsilon_1(h)$ tend vers 0 donc $v'(u(a))\varepsilon_1(h)$ tend vers 0 et $u'(a)h + h\varepsilon_1(h)$ tend vers 0.
Or quand y tend vers 0 alors $\varepsilon_2(y)$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{h\mapsto 0} \varepsilon_3(h) = 0$.
Donc $v(u(a+h)) = v(u(a)) + v'(u(a))(u'(a)h + h\varepsilon_3(h)$ avec $\lim\limits_{h\mapsto 0} \varepsilon_3(h) = 0$
Donc $v\ o\ u$ est dérivable en a et $(v\ o\ u)'(a) = v'(u(a))u'(a)$

3.4 Fonction réciproque

1. Si f est continue sur I et si f est strictement monotone sur I
   alors f réalise une bijection de I sur $f < I >$
   c'est-à-dire tout λ de $f < I >$ admet un antécédent unique c dans I pour f
   c'est-à-dire $\forall \lambda \in f < I > \qquad \exists! c \in I \qquad f(c) = \lambda$
   c'est-à-dire que $\forall \lambda \in f < I >$ l'équation $\lambda = f(x)$ d'inconnue x a une solution unique c dans I
2. De plus, La bijection réciproque f^{-1} existe, est continue sur $f < I >$, a le même sens de variation sur $f < I >$ que le sens de variation de f sur I.
   $$f^{-1} : f < I > \longrightarrow I$$
   $$y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'antécédent de y par f dans I}$$
3. Dans un repère orthonormé la courbe représentative de la bijection réciproque est l'image de la courbe représentative de f par la symétrie orthogonale d'axe $D : y = x$.
4. Si de plus, f est dérivable sur I et f' ne s'annule jamais sur I
   alors f^{-1} l'est aussi sur $f < I >$
   et l'on a $\boxed{\forall y \in f < I > \qquad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$
5. Posons $y_0 = f(x_0)$.
   Lorsque $f'(x_0) \neq 0$ la courbe de f admet en $M_0(x_0, y_0)$ une tangente (T) de pente $f'(x_0)$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et la courbe de f^{-1} admet en $M_0'(y_0, x_0)$ une tangente (T') symétrique de (T) par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   Lorsque $f'(x_0) = 0$ la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ est horizontale alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 mais la courbe de f^{-1} admet quad même en $M_0'(y_0, x_0)$ une tangente verticale symétrique de (T) par rapport à la droite d'équation $y = x$

3.4.1 Démonstration :

Soient y et y_0 des éléments de $f < I >$ avec $y \neq y_0$.
Comme f est bijective alors il existe x et x_0 dans I tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Quand y tend vers y_0 alors comme f^{-1} est continue alors $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(y_0)$.
Or $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$ donc x tend vers x_0.
Donc $\displaystyle\lim_{y \mapsto y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

3.4.2 Exemple 1

ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ne s'annule jamais sur $]0;+\infty[$ donc $exp = (ln)^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $(exp)'(y) = (ln^{-1})'(y) = \dfrac{1}{(ln)'(exp(y))} = \dfrac{1}{(ln)'(e^y)} = \dfrac{1}{\frac{1}{e^y}} = e^y$

3.4.3 Exemple 2

exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée $x \mapsto exp(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ donc $ln = (exp)^{-1}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ $\quad (ln)'(y) = (exp^{-1})'(y) = \dfrac{1}{(exp)'(exp^{-1}(y))} = \dfrac{1}{exp(ln(y))} = \dfrac{1}{y}$

3.5 Tableau des formules usuelles de dérivation

D_f	$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	C	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\alpha \ x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}^{+*}$	$ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}$	$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$
$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$
$\mathbb{R}$	$cos(ax+b)$avec $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} sin(ax+b) + C$
$\mathbb{R}$	$sin(ax+b)$avec $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a} cos(ax+b) + C$
$\mathbb{R}$ sauf les $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où k entier relatif	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$	$tan(x) + C$
$\mathbb{R}$ sauf les $k\pi$ où k entier relatif	$\mathbb{R}$	$\frac{-1}{sin^2(x)} = 1 + cotan^2(x)$	$-cotan(x) + C$
$\mathbb{R}$	$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\mathbb{R}$	$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$]-1;1[$	$Arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$]-1;1[$	$Arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}$	$Argsh(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$]1;+\infty[$	$Argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$]1;+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$]-1;1[$	$Argth(x) = \frac{1}{2} \ ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{1-x^2}$

	$f(x)$		$f'(x)$
D_u	$\lambda u(x)$	$D_{u'}$	$\lambda u'(x)$
$D_u \cap D_v$	$u(x)+v(x)$	$D_{u'} \cap D_{v'}$	$u'(x)+v'(x)$
$D_u \cap D_v$	$u(x)v(x)$	$D_{u'} \cap D_{v'}$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$D_v - \{x/v(x)=0\}$	$\frac{1}{v(x)}$	$D_{v'} - \{x/v(x)=0\}$	$-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$
$D_u \cap D_v - \{x/v(x)=0\}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$D_{u'} \cap D_{v'} - \{x/v(x)=0\}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$\{x/x \in D_u \ et \ u(x) \in D_v\}$	$v(u(x))$	$\{x/x \in D_{u'} \ et \ u(x) \in D_{v'}\}$	$u'(x)v'(u(x))$
$\{x/u(x) \geq 0\}$	$\sqrt{u(x)}$	$D_{u'} \cap \{x/u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\{x/u(x) > 0\}$	$ln(u(x))$	$D'_u \cap D_{v'}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
D_u	$e^{u(x)}$	$D_{u'}$	$u'(x)e^{u(x)}$

3.6 Dérivées successives- Fonctions de classe C^p et de classe C^∞

3.6.1 Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert non vide I.
Soit f' la fonction dérivée de f sur I.
Si f' est dérivable sur I alors sa fonction dérivée s'appelle la dérivée seconde de $f$et se note f'' ou $f^{(2)}$. On dit alors que f est 2 fois dérivable sur I.
Si f est $n-$fois dérivable sur I alors la dérivée d'ordre n se note $f^{(n)}$.
On dit que f est de classe C^0 lorsque f est continue sur I. On dit que f est de classe C^1 lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I.
On dit que f est de classe C^2 lorsque f est dérivable 2 fois sur I et que $f^{(2)}$ est continue sur I.
On dit que f est de classe C^n lorsque f est dérivable n fois sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I.
On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable sur I.

3.6.2 Exemples

1. Une fonction polynôme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
2. Une fonction rationnelle est de classe C^∞ sur son ensemble de définition
3. La fonction exponentielle exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
4. La fonction logarithme népérien ln est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$

3.6.3 Polynômes dérivés successifs

La fonction polynôme de degré n,
$P : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, pour tout entier naturel k non nul , on note $P^{(k)}(x)$ le nombre dérivé -k^{ieme} en x.
Par convention, $P^{(0)}(x)$ est $P(x)$

1. $\forall k \in [|1; n|]$ l'on a : $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k}$
2. On en déduit que $\forall k \geq n+1$ l'on a : $P^{(k)}(x) = 0$
3. et que $\forall k \in [|0; n|]$ l'on a : $P^{(k)}(0) = k!\, a_k$
4. d'où $\forall x \in \mathbb{R}\ \ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$
5. d'où $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x-\alpha)^k$
   C'est la **Formule de Taylor-Mac Laurin pour les polynômes**

3.7 démonstration

1. démonstration par récurrence :

   Notons $pr(k)$: $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k}$

   (a) La propriété est vraie pour $k = 1$ car $P^{(1)}(x) = (P(x))' = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)' = \sum_{i=k}^{n} i a_i x^{i-1}$

   (b) Soit un entier naturel $k \geq 1$ supposons que $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k}$

   alors $P^{(k+1)}(x) = (P^{(k)})'$

   $= (\sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k})' = \sum_{i=k+1}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)(i-k)a_i x^{i-k-1}$

   (c) La propriété pr étant initialisée à 1 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $k \geq 1$

2. démonstration par récurrence initialisée à partir du rang $n+1$ évidente
3. évident
4. évident
5. il suffit d'appliquer la propriété précédente à $Q(x) = P(x+\alpha)$

   car $Q(x) = P(x+\alpha)$, $Q'(x) = P'(x+\alpha)$, $Q''(x) = P''(x+\alpha), \cdots$

   d'où $Q(0) = P(\alpha)$, $Q'(0) = P'(\alpha)$, $Q''(0) = P''(\alpha), \cdots$ Or $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k$

   donc $P(x+\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} x^k$ d'où $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x-\alpha)^k$

3.7.1 Formule de Leibniz

Soient des fonctions f et g dérivables indéfiniment sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit fg est aussi indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ (fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

Démonstration :
Notons $pr(n) : (fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$.

1. Initialisation : elle est vraie en $n = 1$ car :
   $(fg)' = fg' + f'g = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1-0)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(1-1)} = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} f^{(i)} g^{(1-i)}$
2. Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un entier fixé $k \geq 1$ c'est-à-dire que :
   $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$.
   Alors $(fg)^{(k+1)} = [(fg)^{(k)}]' = [\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}]' = \sum_{i=0}^{k} [\binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}]'$.
   $= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [f^{(i)} g^{(k-i)}]' = \sum_{i=0}^{k} [\binom{k}{i} [f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k-i+1)}]$
   $= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)}$
   $= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} f^{(j)} g^{(k-j+1)} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k+1-j)}$
   en effectuant le changement d'indice $j = i + 1$ dans la première somme et $j = i$ dans la deuxième somme.
   Donc $(fg)^{(k+1)} = \binom{k}{0} f^{(0)} g^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} [\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}] f^{(j)} g^{(k+1-j)} + \binom{k}{k} f^{(k+1)} g^{(0)}$
   $(fg)^{(k+1)} = \binom{k+1}{0} f^{(0)} g^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} f^{(j)} g^{(k+1-j)} + \binom{k+1}{k+1} f^{(k+1)} g^{(0)}$
   $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion : pr étant initialisée en 1 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$

Applications :
On vérifie aisément cette formule sur quelques cas particuliers :

1. $(fg)' = f'g + fg'$
2. $(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$
3. $(fg)^{(3)} = ((fg)'')' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

3.8 Extrema globaux et locaux

3.8.1 Définitions

Soit I un intervalle. Soit $x_0 \in I$ (x_0 peut être une borne de I)

1. On dit que f présente un maximum relatif ou local en x_0 lorsqu'il existe un intervalle ouvert I' de centre x_0 tel que $\forall x \in I'$ l'on a $f(x) \leq f(x_0)$
2. On dit que f présente un minimum relatif ou local en x_0 lorsqu'il existe un intervalle ouvert I' de centre x_0 tel que $\forall x \in I'$ l'on a $f(x) \geq f(x_0)$
3. On dit que f présente un extrémum relatif ou local en x_0 lorsque f présente un maximum ou un minimum relatif ou local en x_0
4. On dit que f présente un maximum absolu ou global en x_0 lorsque $\forall x \in I$ l'on a $f(x) \leq f(x_0)$
5. On dit que f présente un minimum absolu ou global en x_0 lorsque $\forall x \in I$ l'on a $f(x) \geq f(x_0)$
6. On dit que f présente un extrémum absolu ou global en x_0 lorsque f présente un maximum ou un minimum absolu ou global en x_0

3.8.2 Théorème 1

1. Si f est dérivable sur I
2. Si x_0 est un extremum local de f sur I
3. Si x_0 n'est pas une borne de I

Alors $f'(x_0) = 0$

3.8.3 Théorème 2

1. Si f est dérivable sur I
2. Si x_0 est un extremum local de f sur I
3. Si x_0 est une borne gauche de I

Alors $f'_d(x_0) \geq 0$ dans le cas d'un minimum et $f'_d(x_0) \leq 0$ dans le cas d'un maximum

3.8.4 Théorème 3

1. Si f est dérivable sur I
2. Si x_0 est un extremum local de f sur I
3. Si x_0 est une borne droite de I

Alors $f'_g(x_0) \leq 0$ dans le cas d'un minimum et $f'_g(x_0) \geq 0$ dans le cas d'un maximum

3.8.5 Théorème 4

1. Si f est dérivable sur I
2. Si f' s'annule en x_0 **en y changeant de signe**
3. Si x_0 n'est pas une borne de I

Alors f présente en x_0 un extremum local

Démonstration Théorème 1
On va supposer que x_0 n'est pas une borne de I et que f a un maximum en x_0

- A gauche de x_0 le taux $T_f = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$
  car $x - x_0 < 0$ et $f(x) \leq f(x_0)$
- A droite de x_0 le taux $T_f = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$
  car $x - x_0 > 0$ et $f(x) \leq f(x_0)$
- Or T_f et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} T_f$ ont même signe au voisinage de x_0
- donc $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$ d'où $f'(x_0) = 0$

Démonstration analogue si f a un minimum en x_0.
Démonstration Théorème 2
On va supposer que x_0 est la borne gauche de I et que f a un maximum en x_0

- A droite de x_0 le taux $T_f = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$
  car $x - x_0 > 0$ et $f(x) \leq f(x_0)$
- Or T_f et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} T_f$ ont même signe au voisinage à droite en x_0
- donc $f'(x_0) \leq 0$

Démonstration analogue si f a un minimum en x_0.
Démonstration Théorème 3
On va supposer que x_0 est la borne droite de I et que f a un maximum en x_0

- A gauche de x_0 le taux $T_f = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$
  car $x - x_0 < 0$ et $f(x) \leq f(x_0)$
- Or T_f et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} T_f$ ont même signe au voisinage à droite en x_0
- donc $f'(x_0) \geq 0$

Démonstration analogue si f a un minimum en x_0.
Démonstration Théorème 4
Supposons que $f'(x) < 0$ à gauche de x_0 et $f'(x) > 0$ à droite de x_0 et que $f'(x_0) = 0$

- A gauche de x_0 : $f'(x) < 0$. Or $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} T_f$ donc $T_f < 0$ donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$.
  Or $x - x_0 < 0$ donc $f(x) - f(x_0) > 0$ donc $f(x) > f(x_0)$
- A droite de x_0 : $f'(x) > 0$. Or $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} T_f$ donc $T_f > 0$ donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Or $x - x_0 > 0$ donc $f(x) - f(x_0) > 0$ donc $f(x) > f(x_0)$
- A gauche de x_0 et à droite de x_0 on a : $f(x) > f(x_0)$ donc f admet en x_0 un extremum local

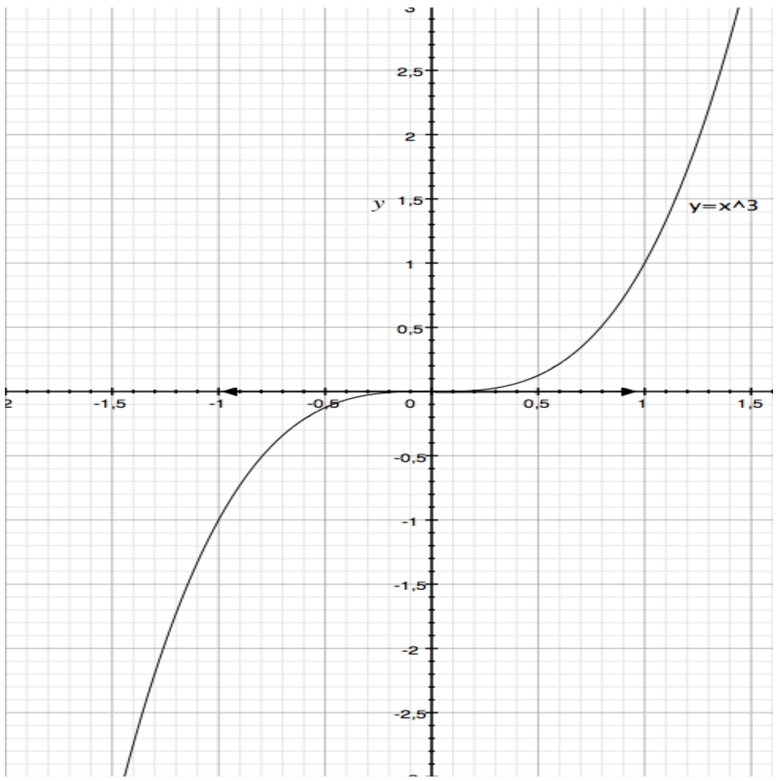
3.8.6 Remarque 1

Le théorème 4 est une condition suffisante pour avoir un extremum local.
Ce n'est pas une condition nécessaire .
Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \; si \; 0 < x \leq 1 \\ \\ x^2 \; si \; x > 1 \end{cases}$$

3.8.7 Remarque 2

Dans le théorème 4, il faut absolument que $f'(x)$ change de signe en x_0.
Exemple : Soit la courbe d'équation $y = f(x) = x^3$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$ mais n'y change pas de signe donc le point $O(0;0)$ n'est pas un extremum.



4 Sens de variation d'une fonction numérique

4.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est constante sur I lorsque pour $\forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I$ l'on a $f(x_1) = f(x_2)$
2. On dit que f est croissante sur I lorsque $\forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I$ l'on a si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
3. On dit que f est strictement croissante sur I lorsque $\forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I$ l'on a si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$
4. On dit que f est décroissante sur I lorsque $\forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I$ l'on a si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$
5. On dit que f est strictement décroissante sur I lorsque $\forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I$ l'on a si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

4.2 Théorèmes sur les variations n'utilisant pas la dérivée

Soient I et des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$

1. Si f et g sont croissantes sur I alors $f + g$ est croissante sur I
2. Si f et g sont décroissantes sur I alors $f + g$ est décroissante sur I
3. Si f est croissante sur I et si $\lambda < 0$ alors λf est décroissante sur I
4. Si f est croissante sur I et si $\lambda > 0$ alors λf est croissante sur I
5. Si f est décroissante sur I et si $\lambda > 0$ alors λf est décroissante sur I
6. Si f est décroissante sur I et si $\lambda < 0$ alors λf est croissante sur I
7. Si f est croissante sur I, si $f < I > \subset J$, si g est croissante sur J alors $g \circ f$ est croissante sur I
8. Si f est décroissante sur I, si $f < I > \subset J$, si g est décroissante sur J alors $g \circ f$ est croissante sur I
9. Si f est croissante sur I, si $f < I > \subset J$, si g est décroissante sur J alors $g \circ f$ est décroissante sur I
10. Si f est décroissante sur I, si $f < I > \subset J$, si g est croissante sur J alors $g \circ f$ est décroissante sur I

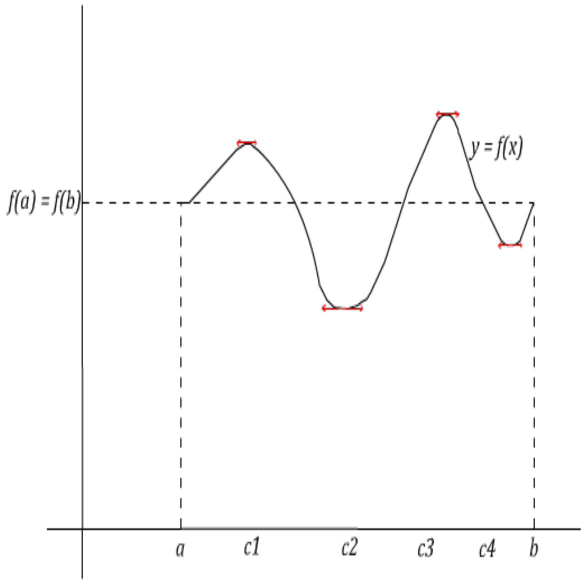
4.3 Théorème de Michel Rolle (1652-1719)

1. Si $a < b$,
2. Si f est continue sur $[a; b]$
3. Si f est dérivable sur $]a; b[$
4. Si $f(a) = f(b)$

Alors

$$\exists\, c \in \,]a; b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

. **Cela veut dire géométriquement qu'il existe au moins un point $M(c, f(c))$ de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses**



4.3.1 Démonstration

Comme f est continue sur $[a; b]$ alors f y est bornée et y atteint ses bornes m et M.
Par conséquent , $\exists\, c \in [a; b]$ $\exists\, d \in [a; b]$ tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$.

- ou bien $f(c) = f(d)$ donc $m = M$ donc f est constante sur $[a; b]$ donc $\forall c \in [a; b]$ $f'(c) = 0$ donc $\exists c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$. CQFD
- ou bien $f(c) \neq f(d)$ alors forcément $c \in]a; b[$ et $d \in]a; b[$. Mais alors c est un minimum (et d est un maximum) donc $\exists c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$. CQFD

4.3.2 Exemple

Soit f définie par $f(x) = x^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$. Alors

- f est continue sur $[-1; 1]$
- f est dérivable sur $] - 1; 1[$

- $f(-1) = f(1) = 1$
- donc $\exists c \in]-1;1[$ tel que $f'(c) = 0$ ici $c = 0$

4.3.3 Remarques

Les hypothèses du Théorème de Rolle sont suffisantes mais ne sont pas pas nécessaires.
Exemple 1

> Soit f définie par $f(x) = x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$. Alors
> - f est continue sur $[-1; 1]$
> - f est dérivable sur $]-1; 1[$
> - $f(-1) \neq f(1)$
> - et pourtant $\exists c = 0$ tel que $f'(c) = 0$

Exemple 2

> Soit
> $$g(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x = 0 \\ 1 - x \; si \; x \in]0; 1] \end{cases}$$
> - g est dérivable sur $]0; 1[$
> - $g(0) = g(1)$
> - mais g n'est pas continue sur $[0; 1]$

Exemple 3

> Soit abs définie par $abs(x) = \mid x \mid$. Alors
> - abs est continue sur $[-1; 1]$
> - $abs(-1) = abs(1) = 1$
> - mais abs n'est pas dérivable sur $]-1; 1[$ car abs non dérivable en 0

4.3.4 Exercice : Oral CPGE ⋆ ⋆⋆

> Soient a et b tels que $a < b$ et $f : [a \,;\, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a \,;\, b]$, dérivable sur $]a \,;\, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
> Démontrer que $\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists c \in]a \,;\, b[\qquad f'(c) = r(f(c))^2$

Soit $r \in \mathbb{R}$.
Soit
$$\begin{array}{rccc} F : & [a \,;\, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \end{array}$$

Soit
$$\begin{array}{rccc} g : & [a \,;\, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = e^{-r\, F(x)}\, f(x) \end{array}$$

- g est continue sur $[a \,;\, b]$ et dérivable sur $]a \,;\, b[$
- $g(a) = g(b) = 0$ car $f(a) = f(b) = 0$
- On peut donc appliquer le théorème de Rolle sur la fonction g :
  $\exists c \in]a \,;\, b[\quad g'(c) = 0$
- Or $g'(x) = -r\, f(x)\, e^{-r\, F(x)}\, f(x) + e^{-r\, F(x)}\, f'(x) = e^{-r\, F(x)} \left(-r\, (f(x))^2 + f'(x)\right)$
- Donc $\exists c \in]a \,;\, b[\quad g'(c) = e^{-r\, F(r)} \left(-r\, (f(r))^2 + f'(r)\right) = 0$
- Or $e^{-r\, F(x)} > 0$ alors $\exists c \in]a \,;\, b[\qquad f'(c) = r(f(c))^2$

4.4 Théorème des accroissements finis de Lagrange

Si $a < b$, si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ Alors

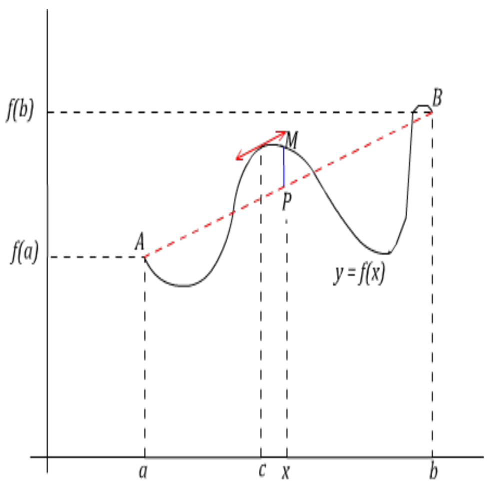
1. $$\exists\, c \in\,]a;b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

2. **Cela veut dire géométriquement qu'il existe au moins un point $M(c, f(c))$ de la courbe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB)**

3. $$\exists\, c \in\,]a;b[\text{ tel que } f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

4. en posant $b = a + h$

$$\exists \theta \in\,]0;1[\text{ tel que } f(a+h)-f(a) = hf'(a+\theta h)$$



4.4.1 Démonstration

L'équation de la droite (AB) où $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est :
$y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ donc $g(x) = \overline{MP} = f(x) - \left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$.

1. $g(a) = g(b) = 0$
2. - g est continue sur $[a;b]$ et g est dérivable sur $]a;b[$
   - $\forall x \in\,]a;b[\; g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Alors d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a;b[\quad g'(c) = 0$
Donc $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ d'où $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ CQFD

4.5 1ère Inégalité des accroissements finis

1. Si $a < b$
2. Si f est continue sur $[a;b]$
3. Si f dérivable sur $]a;b[$
4. Si $\exists\ (m, M) \in\ R^2$ tel que $\forall x \in\ ]a;b[$ on a $m \leq f'(x) \leq M$

Alors

1. $$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$
2. $$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

4.6 2ème Inégalité des accroissements finis

1. Si $a < b$
2. Si f est continue sur $[a;b]$
3. Si f dérivable sur $]a;b[$
4. Si $\exists\ M \in\ R^+$ tel que $\forall x \in\ ]a;b[$ on a $\mid f'(x) \mid \leq M$
5. Si $x_1 \in]a;b[$ et si $x_2 \in]a;b[$

Alors

$$0 \leq \mid f(x_2) - f(x_1) \mid \leq M \mid x_2 - x_1 \mid$$

4.7 Applications des accroissements finis

4.7.1 Encadrement

1. Démontrer que $\forall n \in\ \mathbb{N}^*$ l'on a : $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
2. Trouver une valeur approchée de $ln(\pi)$ en utilisant l'intervalle $[3;\pi]$
3. Démontrer que $\forall n \in\ \mathbb{N}^*$ l'on a : $\dfrac{1}{n+1} \leq ln(n+1) - ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$
4. Soient les réels α et β tels que $0 < \alpha \leq \beta < \dfrac{\pi}{2}$.
   Démontrer que $\dfrac{\beta - \alpha}{cos^2(\alpha)} \leq tan(\beta) - tan(\alpha) \leq \dfrac{\beta - \alpha}{cos^2(\beta)}$.
   En déduire un encadrement de $tan(0,78)$ et de $tan(0,8)$

4.7.2 Sens de variation des fonctions $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ et de $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$

1. A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que

$$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire le sens de variations et la limite en $+\infty$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

1.
   - Comme $x > 0$ on pose $a = x$ et $b = x+1$ donc $a < b$ et $a - b = x + 1 - x = 1$.
   - ln est continue sur $[x\,;\,x+1]$ car ln est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ et $[x\,;\,x+1] \subset 0\,;\,+\infty[$
   - ln est dérivable sur $]x\,;\,x+1[$ car ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $]x\,;\,x+1[\subset 0\,;\,+\infty[$
   - Donc d'après le théorème des accroissements finis on peut dire :

$$\exists c \in]x\,;\,x+1[\qquad ln(x+1) - ln(x) = (ln)'(c) = \frac{1}{c}$$

   - Par conséquent, comme $x < c < x+1$ alors $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ donc

$$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \frac{1}{x}$$

2.
   - Soit f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = exp\left[x\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = exp\left[x\,ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$
     - $\diamond$ $\forall x > 0 \quad f(x) = exp[x(ln(x+1) - ln(x)] = exp[x\,ln(x+1) - x\,ln(x)]$
     - $\diamond$ f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$
     - $\diamond$ $\forall x > 0 \quad f'(x) = [x\,ln(x+1) - x\,ln(x)]'\,exp[x\,ln(x+1) - x\,ln(x)]$

$$f'(x) = \left[1\,ln(x+1) + x\frac{1}{x+1} - 1\,ln(x) - x\frac{1}{x}\right]' exp[x\,ln(x+1) - x\,ln(x)]$$
$$f'(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) + \frac{x}{x+1} - 1\right] exp[x\,ln(x+1) - x\,ln(x)]$$
$$f'(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) + \frac{x-(x+1)}{x+1}\right] exp[x\,ln(x+1) - x\,ln(x)]$$
$$f'(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x+1}\right] exp[x\,ln(x+1) - x\,ln(x)]$$

     - $\diamond$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $h(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x+1}\right]$ car $exp[x\,ln(x+1) - x\,ln(x)] > 0$
       - $\star$ h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$
       - $\star$ $\forall x > 0$ on a :

$$h'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

- $\star$ $\forall x > 0$ on a $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$
- $\star$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 0$. Comme de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$
- $\star$ Comme h est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ alors $\forall x > 0 \quad h(x) > 0$

$\diamond$ Par conséquent, $\forall x > 0 \quad f'(x) = h(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\diamond$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$ car

- $\star$ en posant $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ alors $l(y) = ln\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right] = x\;ln\left[1+\dfrac{1}{x}\right] = \dfrac{ln\left[1+\dfrac{1}{x}\right]}{\dfrac{1}{x}}$
- $\star$ En posant $h = \dfrac{1}{x}$ alors $ln(y) = \dfrac{ln(1+h)}{h}$
- $\star$ Quand $x \to +\infty$ alors $h \to 0$ d'où $ln(y) = \dfrac{ln(1+h)}{h} = \dfrac{ln(1+h) - ln(1)}{1+h-1} \to (ln)'(1) = 1$ item [$\star$] $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(y) = \lim\limits_{h\to 0} ln(y) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} y = exp(1) = e$

$\diamond$ Voici alors le tableau des variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	e

- Soit g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = f(x)\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = f(x) + \dfrac{1}{x}f(x)$

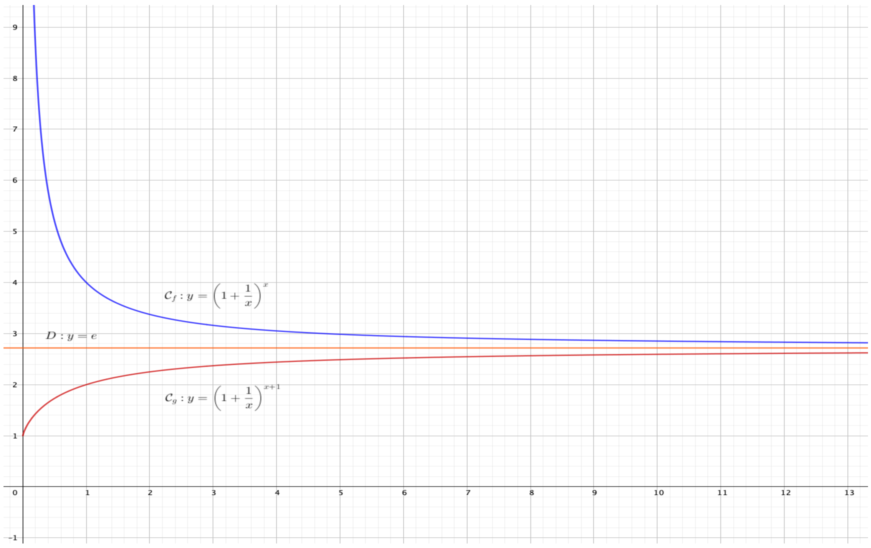
$\diamond$ Comme $x \to \left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ et que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ alors g qui est le produit des ces deux fonctions est alors dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\diamond$
- $\star$ $\forall x > 0 \quad g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = exp\left[(x+1)ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = exp\left[(x+1)ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]$
  $g(x) = exp[(x+1)[ln(x+1) - ln(x)]] = exp[(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]$
- $\star$ $\forall x > 0 \quad g'(x) = [(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]'\,exp[(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]$
  Comme $exp[(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)] > 0$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $u'(x)$ avec $u(x) = [(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]$.
- $\star$ $u'(x) = ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - ln(x) - (x+1)\dfrac{1}{x}$
  $u'(x) = ln(x+1) + 1 - ln(x) - \dfrac{x+1}{x} = ln(x+1) + 1 - ln(x) - 1 - \dfrac{1}{x} = ln(x+1) - ln(x) - \dfrac{1}{x}$
- $\star$ Or d'après la question précédente on sait que $ln(x+1) - ln(x) < \dfrac{1}{x}$ donc $u'(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$ d'où g est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

◇ Comme $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x} f(x)$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = e$

◇ On peut alors dresser le tableau des variations de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$	e



4.7.3 Génération de fonctions k-lipschitziennes (Rudolf Otto Sigmund Lipschitz 1832-1903)

Définition :

> Soit k un réel > 0.
> On dit que f est $k-$lipschitzienne sur I
> lorsque $\forall x_1 \in I\ \forall x_1 \in I$ on a : $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid < k \mid x_1 - x_2 \mid$
> k s'appelle le coefficient de Lipschitz.
> si $0 < k < 1$ alors f est dite $k-$contractante.

Théorème

> **Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle fermé alors f est lipschitzienne**.

Démonstration :
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f' existe et est continue sur I fermé donc f' est bornée sur I donc $\mid f' \mid$ est majorée sur I par un réel $k > 0$ donc d'après le théorème des accroissements finis f est $k-$lipschitzienne

4.7.4 Etude d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

> 1. Si $u_0 \in I$
> 2. Si I est stable par f c'est-à-dire que $f < I > \subset I$
> 3. Si la fonction f a un point fixe α c'est-à-dire $\exists \alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
> 4. Si la dérivée f' est majorée sur I par k où $0 < k < 1$
>   c'est-à-dire $\forall x \in I$ on a $\mid f'(x) \mid < k$ avec $0 < k < 1$
>
> Alors
>
> 1. On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in I$
> 2. puis que $0 \leq \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq k \mid u_n - \alpha \mid$ d'après l'inégalité des acroissements finis.
> 3. On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ l'on a $0 \leq \mid u_n - \alpha \mid \leq k^n \mid u_0 - \alpha \mid$
> 4. D'où $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \alpha$

4.7.5 Théorème du prolongement de la dérivée à droite en a

> 1. Si f est continue sur $[a; b]$
> 2. Si f est dérivable sur $]a; b[$
> 3. Si $\lim\limits_{x \mapsto a^+} f'(x) = L$ finie ou infinie
>
> Alors
>
> 1. $\lim\limits_{x \mapsto a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$
> 2. Dans le cas où L est finie , f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = L$
> 3. Dans le cas où L est infinie , C_f admet au point $M(a; f(a))$ une demi-tangente verticale.

Démonstration :
Méthode 1 **:**
D'après le Théorème des accroissements finis
$\exists\theta \in]0;1[$ tel que $f(a+h)-f(a) = hf'(a+\theta h)$.
Par conséquent quand $h \to 0$ alors $a+\theta h \to a^+$. Or $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = L$ donc $f'(a+\theta h) \to L$. On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
En posant $x = a+h$ on a $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$
Méthode 2 **dans le cas** L **finie**
Comme $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = L$ alors soit $x \in]a;a+h[$ d'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in]a;x[\subset]a;a+h[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$
$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\, h \; 0 < h < b-a$ tel que $\forall t \in]a;a+h[$ on a : $L-\varepsilon \le f'(t) \le L+\varepsilon.(*)$
Ce c est donc un t particulier vérifiant la relation $(*)$
Donc $\forall x \in]a;a+h[\; L-\varepsilon \le \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le L+\varepsilon$ donc $-\varepsilon \le \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \le +\varepsilon$ donc $\mid \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \mid \le \varepsilon$. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ donc f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = L$.
Méthode 2 **dans le cas** L **infinie**
Comme $\lim\limits_{x\mapsto a^+} f'(x) = \infty$
alors $\forall A > 0 \; \exists\alpha > 0$ tel que $a < x \le a+\alpha \Longrightarrow f'(x) > A$.
En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on obtient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge A$ donc $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ donc C_f admet au point $M(a;f(a))$ une demi-tangente verticale.

ATTENTION, la réciproque est fausse ! Le taux de variation de f peut admettre une limite sans que la dérivée f' en admette une.
Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \, sin\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

1. (a) $g : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) $i : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ donc l'ensemble-image $i < \mathbb{R}^* >= \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$
   (d) sin est dérivable sur $\mathbb{R}$
   (e) donc $h = sin \; \circ i : x \mapsto sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
   (f) par conséquent la restriction de f à $\mathbb{R}^*$ qui est le produit gh est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

   $\forall x \neq 0 \qquad f'(x) = 2x \, sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{-1}{x^2}\right) cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \, sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)$
2. Si $x \neq 0$ alors $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \, sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Alors
   (a) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ car $0 < \left| x \, sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \mid x \mid$
   (b) Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$
   (c) et pourtant $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f'(x)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Voici donc un exemple de fonction dérivable en 0 mais dont la dérivée f' n'est pas continue en 0.

f admet bien une dérivée sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Mieux, le Théorème de Gaston DARBOUX dit que malgré cela dès qu'une fonction f est dérivable sur un segment $[a \; ; \; b]$ alors même si sa dérivée f' n'est pas continue sur $[a \; ; \; b]$ elle vérifie quand même le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle de bornes $f'(a)$ et $f'(b)$

4.7.6 Théorème du prolongement de la dérivée à gauche en b

1. Si f est continue sur $[a;b]$
2. Si f est dérivable sur $]a;b[$
3. Si $\lim_{x \mapsto b^-} f'(x) = L$ finie ou infinie

Alors

1. $\lim_{x \mapsto b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = L$
2. Dans le cas où L est finie , f est dérivable à gauche en b et $f'_g(b) = L$
3. Dans le cas où L est infinie , C_f admet au point $M(b; f(b))$ une demi-tangente verticale.

4.7.7 Théorème du prolongement de la classe $\mathcal{C}^1$

1. Si f est continue sur $[a;b]$
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a;b]$
3. Si $\lim_{x \mapsto a^+} f'(x) = L$ finie

Alors

1. f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = L$
2. donc f' est continue à droite en a
3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$

On peut généraliser le théorème précédent par récurrence :

4.7.8 Théorème du prolongement de la classe $\mathcal{C}^n$

1. Si f est continue sur $[a;b]$
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a;b]$
3. Si $\forall p \leq n \quad \lim_{x \mapsto a^+} f^{(p)}(x) = L_p$ finie

Alors

1. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;b]$
2. $\forall p \leq n \quad f^{(p)}(a) = L_p$

4.7.9 Applications de la dérivation aux variations d'une fonction

Théorème :
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction numérique dérivable sur I.
Alors

1. f est croissante sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in I\ f'(x) \geq 0$
2. f est décroissante sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in I\ f'(x) \leq 0$
3. f est constante sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in I\ f'(x) = 0$

Démonstration :
$\Longrightarrow$:
Supposons que f soit croissante sur I. Soient $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$

1. soit x_1 à gauche de x_0 donc $x_1 < x_0$ donc $x_1 - x_0 < 0$.
   Comme f est croissante alors $f(x_1) \leq f(x_0)$ d'où $f(x_1) - f(x_0) \leq 0$
   Par conséquent $T_f = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$
2. soit x_1 à droite de x_0 donc $x_1 > x_0$ donc $x_1 - x_0 > 0$.
   Comme f est croissante alors $f(x_1) \geq f(x_0)$ d'où $f(x_1) - f(x_0) \geq 0$
   Par conséquent $T_f = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$
3. Au voisinage de x_0 alors $T_f = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$ donc $\lim\limits_{x_1 \mapsto x_0} T_f \geq 0$
4. donc $\forall x \in I\ f'(x) \geq 0$

$\Longleftarrow$:
Supposons que $\forall x \in I\ f'(x) \geq 0$.
Soient $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$

1. f est continue sur $[x_1; x_2]$ car $[x_1; x_2] \subset I$ et que f est continue sur I puisque f est dérivable sur I
2. f est dérivable sur $]x_1; x_2[$ car $]x_1; x_2[\subset I$ et f est dérivable sur I
3. Alors d'après le Théorème des accroissements finis $\exists\, c \in]x_1; x_2[$ tel que $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c)$
4. Or $\forall x \in I\ f'(x) \geq 0$ donc $f'(c) \geq 0$
5. Donc $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$. Or $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$. Par conséquent $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$.
   On en déduit que $f(x_1) \leq f(x_2)$ donc que f est croissante sur I

Attention!!!

Corollaire

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction numérique dérivable sur I Alors

1. f est strictement croissante sur $I \iff \forall x \in I \; f'(x) > 0$ **sauf éventuellement en des points isolés de I où $f'(x)$ s'annule**
2. f est strictement décroissante sur $I \iff \forall x \in I \; f'(x) < 0$ **sauf éventuellement en des points isolés de I où $f'(x)$ s'annule**
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I \; f'(x) = 0$

5 Règle du Marquis de l'Hôpital ou Règle de Bernouilli

5.1 TAFG Théorème des acroissements finis généralisés

1. Si f et g sont continues sur $[a;b]$
2. Si f et g sont dérivables sur $]a;b[$

alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c) \\ g(b)-g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$

5.1.1 Démonstration

si $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$ alors ce théorème est vrai pour tout $c \in]a;b[$
sinon par exemple $g(a) \neq g(b)$ on applique le théorème de Rolle à la fonction h définie sur $[a;b]$ par

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

5.2 Corollaire du TAFG

1. Si f et g sont continues sur $[a;b]$
2. Si f et g sont dérivables sur $]a;b[$
3. Si $g(a) \neq g(b)$
4. Si $\forall x \in]a;b[$ on a $g'(x) \neq 0$

alors

$$\exists c \in]a;b[\qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

5.3 La Règle de Michel de L'Hôpital dans le cas $\frac{0}{0}$

1. Si f et g sont continues sur un intervalle I contenant x_0
2. Si f et g sont dérivables sur $I - \{x_0\}$
3. Si $\forall x \in I - \{x_0\}$ on a $g'(x) \neq 0$
4. Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$
5. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ où $L \in \overline{\mathbb{R}}$

alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x))}{g(x)} = L$$

5.4 Corollaire de la Règle de l'hôpital

1. Si f et g sont continues sur un intervalle I
2. Si f et g sont dérivables sur $]I - \{x_0\}$
3. Si $\forall x \in I - \{x_0\}$ on a $g'(x) \neq 0$
4. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ où $L \in \overline{\mathbb{R}}$

alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = L$$

5.4.1 Remarque

La réciproque est fausse !!!
Attention, on peut avoir l'existence de la limite du quotient des fonctions sans que le quotient des dérivées n'aie de limite !!!
Contre-exemple : $f(x) = x^2 sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x$

1. f et g satisfont aux hypothèses sur un intervalle I de centre 0
2. Si $x \neq 0$ on a : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x\ sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ car $-1 \leq sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$.
   Si $x > 0$ alors $-x \leq x\ sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$.
   si $x < 0$ alors $-x \geq x\ sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq x$.
   Comme $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
3. Mais si $x \neq 0$ on a : $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f'(x)}{1} = 2x\ sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui n'a pas de limite en 0
   car $cos(\dfrac{1}{x})$ n'en a pas en 0

5.4.2 Application à la recherche de limites présentant la forme indéterminée $\frac{0}{0}$

Parfois, il faut utiliser plusieurs fois de suite cette règle pour arriver au résultat!!! il faut bien vérifier les hypothèses sur f et g mais aussi sur f' et g' !!!

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x) + \dfrac{x^2}{2} - x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x} + x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{3(x+1)} = \dfrac{1}{3}$
en appliquant successivement le Corollaire de la Règle de l'hôpital à $I = [0\ ;\ a]$ où $a > 0$ et à $I = [a; 0]$ où $-1 < a < 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{sin(x) - x\ cos(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{cos(x) - cos(x) + x\ sin(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{sin(x)} = 3$
en appliquant successivement le Corollaire de la Règle de l'hôpital à $I = [0; \dfrac{\pi}{2}]$ et à $I = [-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0]$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sin(\pi x) - ln(x)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi\ cos(\pi x) - \dfrac{1}{x}}{1} = -1 + \pi$
en appliquant successivement le Corollaire de la Règle de l'hôpital à $I = [\dfrac{1}{2}\ ;$
$F32]$
- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3^x}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 3^x ln(3)}{1} = 27 - 27ln(3)$ en appliquant successivement le Corollaire de la Règle de l'hôpital à $I = [3\ ; a]$ où $a > 3$ et à $I = [a\ ;\ 3]$ où $a < 3$
- $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{x - e} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{n(1+x)^{n-1}}{1} = n$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sin(x)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)}{6x} = \dfrac{1}{6}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x\ cos(x)}{x - x\ sin(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x) + x\ sin(x)}{1 - cos(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2sin(x) + xcos(x)}{sin(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3cos(x) - xsin(x)}{cos(x)} = 3$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{sin(x)} - \dfrac{1}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + x^2 - sin(x)}{(x + x^2)sin(x)}$
$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + 2x - cos(x)}{(1+2x)sin(x) + (x + x^2)cos(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + sin(x)}{(2 - x - x^2)sin(x) + 2(1+2x)cos(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{x - sin(x)}{x^3} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1 - cos(x)}{3x^2} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sin(x)}{6x} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{cos(x)}{6} = \dfrac{1}{6}$
- $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sin(x)}{2x} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{cos(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x - x\,cos(x)}{x - sin(x)} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{1 - cos(x) + x\,sin(x)}{1 - cos(x)} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{2sin(x) + x\,cos(x)}{sin(x)} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{3cos(x) - x\,sin(x)}{cos(x)} = 3$
- $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{1}{sin(x)} - \dfrac{1}{x + x^2} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x + x^2 - sin(x)}{(x + x^2)sin(x)} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{1 + 2x - cos(x)}{(1 + 2x)sin(x) + (x + x^2)cos(x)}$
  $= \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{2 + sin(x)}{(2 - x - x^2)sin(x) + 2(1 + 2x)cos(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{cos(2x) - 1}{x^3 + 5x^2} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{-2\,sin(2x)}{3x^2 + 10x} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{-4\,cos(2x)}{6x + 10} = -\dfrac{2}{5}$
- $\lim\limits_{x\mapsto e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{ln(x) - 1} = \lim\limits_{x\mapsto e} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e}{2\sqrt{e}} = \dfrac{\sqrt{e}}{e}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ alors :
  $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{exp(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{exp(x)}{n\,x^{n-1}} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{exp(x)}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{exp(x)}{n!} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} x - \sqrt{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} x - |x|\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$

  $= \lim\limits_{x\mapsto +\infty} x - x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} x\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}}$

  $\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - h^2}}{h} = \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{\dfrac{2h}{\sqrt{1 - h^2}}}{1} = 0$

5.5 Enoncé généralisé 1

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.
Soient f et g des fonctions numériques dérivables sur $]a; b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$.

Si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\lim\limits_{x \mapsto a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

5.6 Enoncé généralisé 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.
Soient f et g des fonctions numériques dérivables sur $]a; b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$.

Si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\lim\limits_{x \mapsto a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

5.6.1 Exemple

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{ln(x)} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{cos(x)}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x \mapsto \pi} \dfrac{1 + cos(x)}{x - \pi} = \lim\limits_{x \mapsto \pi} \dfrac{-sin(x)}{1} = 0$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{n(1+x)^{n-1}}{1} = n$

Attention ! Cette règle n'est utilisable qu'en cas d'indétermination de $\frac{f}{g}$!!!

$-4 = \lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{3x^2 + 1}{2x - 3} \neq \lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{6x}{2} = 3$

On peut l'utiliser avec une certaine astuce pour les limites du type $'' + \infty \times 0''$

- $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x\, e^x = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{1}{\frac{-1}{e^x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \mapsto 0} x\, ln(sin(x)) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{ln(sin(x))}{\frac{1}{x}}$

6 Exercices

6.1 Dérivée et approximation affine.

1. Démontrer que la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable en 1.
2. En déduire qu'il existe une fonction ϕ telle que $\forall h \neq 0 \quad \dfrac{1}{1+h} = 1 - h + h\,\phi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \phi(h) = 0$
3. (a) Simplifier $\dfrac{1}{1+h} - (1-h)$ pour $h \neq 0$
   (b) Démontrer que $\forall h \in \left[-\dfrac{1}{2} \,;\, \dfrac{1}{2}\right] \quad \dfrac{2}{3} \leq \dfrac{1}{1+h} \leq 2$
   (c) En déduire que l'erreur maximale commise quand on remplace $\dfrac{1}{1+h}$ par $1-h$ est inférieure à h^2 si $h \in \left[-\dfrac{1}{2} \,;\, \dfrac{1}{2}\right]$.
   (d) Comparer la valeur donnée pour $\dfrac{1}{1+h}$ par l'approximation $1-h$ pour $h = 3.10^{-5}$ à celle fournie par un calcul direct sur la calculatrice.

6.2 Variations de fonctions

En utilisant les fonctions de référence, déterminer les tableaux de variations des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 2(x-1)^2 + 3$
2. $g : x \mapsto \dfrac{2}{x-1} + 3$
3. $h : x \mapsto 2\sqrt{x-1} + 3$

6.3 Dérivées n-ièmes

On sait que les fonctions *sin* et *cos* sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Démontrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad sin^{(n)}(x) = sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad cos^{(n)}(x) = cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

6.4 Formule de Leibniz

Soient f et g des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. - Ecrire $(fg)^{(1)}, (fg)^{(2)}, (fg)^{(3)}$
   - Rappeler ce qu'est la formule de Leibniz pour la dérivée nième de $(fg)^{(n)}$
2. On suppose que $g(x) = (1 + x^2)f(x)$
   - Où et pourquoi g est-elle de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$?
   - Donner alors l'expression simplifiée de $g^{(n)}(x)$

6.5 Dérivée et parité

Soit une fonction numérique f d'une variable réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ admettant O comme centre de symétrie.

1. Démontrer que si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que f est paire alors f' est impaire.
2. Démontrer que si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que f est impaire alors f' est paire.

6.5.1 Corrigé Méthode 1

1.
   - Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ alors $-x_0 \in \mathcal{D}_f$
   - $f'(-x_0) = \lim\limits_{x \mapsto -x_0} \dfrac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} = \lim\limits_{x \mapsto -x_0} \dfrac{f(x) + f(x_0)}{x - (-x_0)}$ car f est impaire.
     Par conséquent, en posant $X = -x$ on a :
     $f'(-x_0) = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(-X) - f(x_0)}{-X + x_0} = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(X) - f(x_0)}{-X + x_0}$ car f est paire .
     On a donc $f'(-x_0) = -\lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = -f'(x_0)$
   - Comme $\forall x_0 \in \mathcal{D}_f$ on a $-x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $f'(-x_0) = -f'(x_0)$ alors f' est impaire
2.
   - Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ alors $-x_0 \in \mathcal{D}_f$
   - $f'(-x_0) = \lim\limits_{x \mapsto -x_0} \dfrac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} = \lim\limits_{x \mapsto -x_0} \dfrac{f(x) + f(x_0)}{x - (-x_0)}$ car f est impaire.
     Par conséquent, en posant $X = -x$ on a :
     $f'(-x_0) = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(-X) + f(x_0)}{-X + x_0} = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{-f(X) + f(x_0)}{-X + x_0}$ car f est impaire .
     On a donc $f'(-x_0) = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_0)$
   - Comme $\forall x_0 \in \mathcal{D}_f$ on a $-x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $f'(-x_0) = f'(x_0)$ alors f' est paire

6.5.2 Corrigé Méthode 2

1.
   - Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ alors $-x_0 \in \mathcal{D}_f$
   - Soit la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(-x)$.
     — g est la composée de la fonction $x \mapsto -x$ et de la fonction f.
     — $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$
     — $\forall x \in \mathcal{D}_f$on a $-x \in \mathcal{D}_f$
     — f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$
     — Par conséquent, $g'(x) = -1(f'(-x))$
     — Or $g(x) = f(x)$ car $f(-x) = f(x)$ puisque f est paire. Donc $g'(x) = f'(x)$
     — Par conséquent, $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = -f'(-x)$
   - Comme $\forall x_0 \in \mathcal{D}_f$ on a $-x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $f'(-x_0) = -f'(x_0)$ alors f' est impaire
2.
   - Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ alors $-x_0 \in \mathcal{D}_f$
   - Soit la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(-x)$.
     — g est la composée de la fonction $x \mapsto -x$ et de la fonction f.
     — $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$
     — $\forall x \in \mathcal{D}_f$on a $-x \in \mathcal{D}_f$
     — f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$
     — Par conséquent, $g'(x) = -1(f'(-x))$

— Or $g(x) = -f(x)$ car $f(-x) = -f(x)$ puisque f est impaire. Donc $g'(x) = -f'(x)$
— Par conséquent, $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = f'(-x)$

- Comme $\forall x_0 \in \mathcal{D}_f$ on a $-x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $f'(-x_0) = f'(x_0)$ alors f' est paire

6.6 Dérivée et périodicité

Soit une fonction numérique f d'une variable réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ telle que $\exists T > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x + T \in \mathcal{D}_f$.
Démontrer que si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que f est périodique de période T alors f' est aussi périodique de période T..

6.6.1 Corrigé

- Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ alors $x_0 + T \in \mathcal{D}_f$
- $f'(x_0 + T) = \lim\limits_{x \mapsto x_0 + T} \dfrac{f(x) - f(x_0 + T)}{x - (x_0 + T)} = \lim\limits_{x \mapsto x_0 + T} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0 - T}$ car f est périodique de période T.
  On effectue le changement de variable suivant $X = x - T$ alors on a :
  $f'(x_0 + T) = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(X + T) - f(x_0)}{X - x_0} = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$ car f est périodique de période T.
  Par conséquent, $f'(x_0 + T) = \lim\limits_{X \mapsto x_0} \dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f('x_0)$
- Comme $\forall x_0 \in \mathcal{D}_f$ on a $x_0 + T \in \mathcal{D}_f$ et $f'(x_0 + T) = f'(x_0)$ alors f' est périodique de période T.

6.7 Dérivées $n-$ièmes

Calculer les dérivées $n-$ièmes de :

1. $x \mapsto e^{x\sqrt{3}} sin(x)$
2. $x \mapsto x \; cos(x)$
3. $x \mapsto \dfrac{2x}{1 - x^2}$
4. $x \mapsto x^{n-1} ln(x)$

6.8 Dérivées de fonctions défies par morceaux

Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \; sin(x^2) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \left(x + 3\dfrac{x+1}{x+2} \right) \; Arctan(e^{-x})$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} \text{ si } x \in]-\infty; 1[\\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$

6.9 Uniforme continuité

Soit des réels $a < b$.

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;\,b]$.
   Démontrer que f est uniformément continue sur $[a\,;\,b]$.
2. Soit f une application dérivable sur $[a\,;\,b]$ telle que $f(a) = 0$ et $\exists A > 0 \quad \forall x \in [a\,;\,b] \qquad f'(x) \leq A\,f(x)$.
   Démontrer que f est uniformément continue sur $[a\,;\,b]$.

6.10 Valeurs intermédiaires de la dérivée

6.10.1 Théorème de Gaston DARBOUX

Soit des réels $a < b$.
Soit f une application dérivable sur $[a\,;\,b]$ telle $f'(a) \neq f'(b)$.
Alors f' **prend toute valeur intermédiaire entre** $f'(a)$ **et** $f'(b)$**.** c'est-à-dire que

$$\forall \lambda \in \,]f'(a)\,;f'(b)[\quad \exists c \in \,]a\,;\,b[\qquad \lambda = f'(c)$$

Ce théorème formulé en 1875 par Darboux veut dire que :
toute fonction f dérivable sur un intervalle I est telle que $f'(I)$ est un intervalle.
Cela étend le théorème des valeurs intermédiaires au cas où f' existe mais n'est pas continue.

1. Méthode 1 :

   (a) ou bien $f'(a) < f'(b)$
   Soit $\lambda \in \,]f'(a)\,;f'(b)[$. Posons $g(x) = f(x) - \lambda\, x$
   - g est donc dérivable sur $[a\,;\,b]$ car f l'est ainsi que $x \mapsto \lambda\, x$
   - $\forall x \in \,]a\,;\,b[\quad g'(x) = f'(x) - \lambda$ donc $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ et $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$.
   - On a donc $g'(a) < 0 < g'(b)$.
   - Par conséquent, quand x sera très proche de a avec $a < x$ on aura $g(a) < g(x)$
   - De même, quand x sera très proche de b vec $x < b$ on aura $g(x) < g(b)$

   (b) ou bien $f'(a) > f'(b)$
   On se ramène au cas précédent en remplaçant f par $-f$.

2. Méthode 2 :
   Soient $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \in]a\,;\,b] \\ f'(a) \text{ si } x = a \end{cases}$ et $h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} \text{ si } x \in [a\,;\,b[\\ f'(b) \text{ si } x = b \end{cases}$
   Démontrer qu'il existe $cx \in]a\,;\,b[$ tel que $g(x) = y$ ou $h(x) = y$. Conclure.

6.10.2 Valeurs intermédiaires de f'

Soit f dérivable de $[a\,;\,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;\,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. En déduire qu'une fonction dérivée possède la propriété des valeurs i,termédiaires.

6.11 Deug Paris 7 - 1977

Soit f une fonction d'une variable réelle dérivable sur un intervalle $I =]a\ ;\ b[$ avec $a < b$ telle que sa dérivée f' est continue sur I.
Soit $x_0 \in I$ telle que $f'(x_0) \neq 0$.
Démontrer qu'il existe un intervalle $J =]c\ ;\ d[\subset I$ telle que $x_0 \in J$ et un intervalle $J' =]c'\ ;\ d'[$ contenant $f(x_0)$ tels que f réalise une bijection de J sur J'.

- Comme $f'(x_0) \neq 0$ et que f' est continue sur I et que $x_0 \in I$ alors il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 tel que $\forall x \in J \quad f'(x) \neq 0$.
- Sur cet intervalle J on a f' qui ne peut changer de signe sinon $\exists x_1 \in J \quad f'(x_1) = 0$
- Par conséquent, f est strictement monotone sur J
- De plus f est continue sur J car f est dérivable donc continue sur I et $J \subset I$
- Alors f réalise une bijection de J sur l'intervalle $J' = f < J >$
- Comme $x_0 \in J$ et que f est continue sur J alors $f(x_0) \in J'$. J' est un intervalle ouvert $]c'\ ;\ d'[$ car f est strictement monotone sur J

6.12

Soit f dérivable sur $[a\ :;\ b]$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$.
Démontrer que $\exists c \in]a\ ;\ b] \qquad f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.
Interprétation géométrique.

6.13

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) = [m\ ;\ M]$.
Montrer que $\exists c \in \ \mathbb{R} \qquad f(c+1) = f(c) + f'(c)$

6.14

Soient f et g des fonctions dérivables deux fois sur $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ telles que
$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f(b) = g(b) \\ \forall x \in [a\ ;\ b] \qquad f''(x) \leq g''(x) \end{cases}$$
Démontrer que
$$\forall x \in [a\ ;\ b] \qquad g(x) \leq f(x)$$

6.15

Soit f une fonction dérivable deux fois sur $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.
Démontrer que
$$\forall x \in]a\ ;\ b[\quad \exists c \in]a\ ;\ b[\qquad f(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

6.16

On pose $f(x) = (cos(2x) - 4cos(x)$ et $g(x) = sup f(t) - f(t')/ - x < (t - t' < x$

1. Etudier la continuité de g.
2. Etudier la dérivabilité de g.

6.17

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f, f', f'' soient strictes positives.

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! g(x)$ tel que $f(g(x)) = f(x) + 1$
2. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
3. Etudier les variations de g.
4. Démontrer que le graphe de g ademt une asympyote en $+\infty$.
5. On suppose que f admet une limite finie finie en $-\infty$, que peut-on dire de g en $-\infty$?

6.18

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$ où I est intervalle contenant 0.
On pose

$$f(x) = (1 + cos(x))^{tan(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

6.19

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$ où I est intervalle contenant 0.
On pose

$$f(x) = (1 + sin(x))^{cos(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

6.20

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$ où I est intervalle contenant 0.
On pose

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ si } x \neq 0$$

1. Démontrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$.

6.21

Soit f de $]-\pi\ ;\ \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \left\{-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\} \quad f(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{tan(x)}$$

1. Déterminer $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\ ;\ f(0)\ ;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Etudier la dérivabiité de f.
3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur son ensemble de définition.
4. Etudier f et tracer sa représentation graphique.

6.22 Fonction $1-$lipschitzienne sur $[0\,;1]$

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $[0;1]$ et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ \forall x_1 \in [[0\,;1] \ \forall x_2 \in [0;1] \text{ où } x_1 \neq x_2 \quad |f(x_1) - f(x_2| < |x_1 - x_2| \end{cases}$$

Démontrer que $\forall x_1 \in [0\,;1] \quad \forall x_2 \in [0\,;1]$ avec $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \qquad$ on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \dfrac{1}{2}$

6.22.1 Démonstration

Soient $x_1 \in [0\,;1]$ et $x_2 \in [0\,;1]$ avec $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$.
De deux choses l'une :

- ou bien $\mid x_2 - x_1 \mid < \dfrac{1}{2}$. Or $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid < \mid x_1 - x_2 \mid$ donc $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid < \dfrac{1}{2}$. CQFD.
- ou bien $\mid x_2 - x_1 \mid \geq \dfrac{1}{2}$

  Cela veut dire que $x_2 - x_1 \leq -\dfrac{1}{2}$ ou $x_2 - x_1 \geq \dfrac{1}{2}$.
  Mais comme $x_2 > x_1$ alors il ne reste qu'un seul cas $x_2 - x_1 \geq \dfrac{1}{2}$
  D'après l'inégalité triangulaire, on obtient :
  $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid \leq \mid f(x_1) - f(0) \mid + \mid f(0) - f(1) \mid + \mid f(1) - f(x_2) \mid$
  d'où $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid \leq \mid x_1 - 0 \mid + \mid 0 \mid + \mid 1 - x_2 \mid$
  Donc $|f(x_1) - f(x_2)| \leq x_1 + 1 - x_2$
  Or $x_2 - x_1 \geq \dfrac{1}{2}$ donc $x_2 \geq x_1 + \dfrac{1}{2}$ d'où $-x_2 \leq -x_1 - \dfrac{1}{2}$.
  Par conséquent, $x_1 + 1 - x_2 \leq x_1 + 1 - x_1 - \dfrac{1}{2}$
  Donc $|f(x_1) - f(x_2| \leq \dfrac{1}{2}$. CQFD.

6.23 EMLyon 09 - Ex 1 - Partie 1

On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie , pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} \; si \; x \neq 0 \\ \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

Rappel : On admet la Formule dite de Taylor-Young :
Si g est de classe C^n sur un intervalle de bornes a et $a+h$ et admet une dérivée d'ordre $n+1$ en a alors $g(a+h) = g(a) + \dfrac{h}{1!}g'(a) + \cdots + \dfrac{h^n}{n!}g^{(n)}(a) + \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}[g^{(n+1)}(a) + \varepsilon(h)]$ avec $\lim\limits_{h \mapsto 0} \varepsilon(h) = 0$.

Partie 1

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
   (c) Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$
   (d) Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$
2. (a) Etudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
   $$u(x) = (1-x)e^x - 1$$
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) < 0$$
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Dresser le tableau des variations de f.
   (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote , lorsque la variable tend vers $-\infty$.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f

6.23.1 Corrigé Analyse EMLyon 09

On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie , pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} \; si \; x \neq 0 \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

Partie 1

On peut d'abord remarquer que

1. $e^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^x = 1 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow e^x > 1 \Longleftrightarrow x < 0$

3. $e^x - 1 < 0 \Longleftrightarrow e^x < 1 \Longleftrightarrow x < 0$

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ car $\dfrac{x}{e^x-1}$ existe si $x \neq 0$ et $f(0)$ existe car $f(0) = 1$

1. (a) i. la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car
   - la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme
   - la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$
   - $e^x - 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^*$

   ii. la fonction f est continue en 0 car $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 1 = f(0)$.

   en effet, $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$ car $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{e^x - e^0}{x-0} = (exp)'(0) = 1.$

   iii. Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$

   (b) la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ car
   - la fonction $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme
   - la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
   - $e^x - 1$ ne s'annule jamais sur $]-\infty;0[$

   la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ car
   - la fonction $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme
   - la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
   - $e^x - 1$ ne s'annule jamais sur $]0;+\infty[$

   Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

   Pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ on a :

   $$\boxed{f'(x) = \frac{1(e^x-1) - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{u(x)}{(e^x-1)^2}}$$

   (c)
   - Par la méthode directe $\lim\limits_{x\mapsto 0} f'(x)$ aboutit àune indétermination du type $''\dfrac{0}{0}''$ car $\lim\limits_{x\mapsto 0} e^x - 1 - xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0} (e^x-1)^2 = 0$
   - On va lever cette indétermination en considérant d'après Taylor-Young, un développement limité d'ordre 2 de exp au voisinage de 0 car exp est de classe C^1 au voisinage de 0 et $exp^{(2)}$ existe au voisinage de 0 puisque exp est de classe $C^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$:

     au voisinage de 0 , $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\mapsto 0} \varepsilon(x) = 0$
   - Alors au voisinage de 0 on a donc :

   $$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\varepsilon(x) - 1 - x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\varepsilon(x)\right)}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\varepsilon(x) - 1\right)^2}$$

   $$= \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\varepsilon(x) - x - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2}\varepsilon(x)}{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\varepsilon(x)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)\varepsilon(x)}{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\varepsilon(x)\right)^2}$$

$$= \frac{x^2\left[\frac{-1}{2} - \frac{x}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{x}{2})\varepsilon(x)\right]}{x^2\left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\varepsilon(x)\right]^2} = \frac{\frac{-1}{2} - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)\varepsilon(x)}{\left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\varepsilon(x)\right]^2} = \frac{n(x)}{d(x)}.$$

Or $\lim_{x \mapsto 0} n(x) = \frac{-1}{2}$ et $\lim_{x \mapsto 0} d(x) = 1$ donc $\lim_{x \mapsto 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$

(d) i. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

ii. Comme $\lim_{x \mapsto 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$

iii. Alors d'après le théorème de prolongement de la classe C^1 on a :

A. f est dérivable en 0

B. $f'(0) = -\frac{1}{2}$

C. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

2. (a) soit $u(x) = (1-x)e^x - 1$ alors

- $D_u = \mathbb{R}$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car
  — u est la différence de $x \mapsto (1-x)e^x$ et de $x \mapsto 1$
  — $x \mapsto (1-x)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto e^x$ sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$
  — $x \mapsto 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $u'(x) = 1e^x + (1-x)e^x = -xe^x$ du signe de $-x$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > 0$. par conséquent,
  — sur $]-\infty; 0[$ on a $u'(x) > 0$ donc u y est strictement croissante
  — en 0 $u'(x) = 0$
  — sur $]0; +\infty[$ on a $u'(x) < 0$ donc u y est strictement décroissante
  — Comme $u(0) = 0$
  — On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	$-$	
$u(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

(b) On a donc

- $u(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \neq 0$ $u(x) > 0$
- Comme $(e^x - 1)^2 > 0$
- Or nous savons que $\forall x \neq 0$ on a $f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x-1)^2}$ alors
  — $\forall x \neq 0$ $f'(x) < 0$
  — Or $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$
  — donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) < 0$

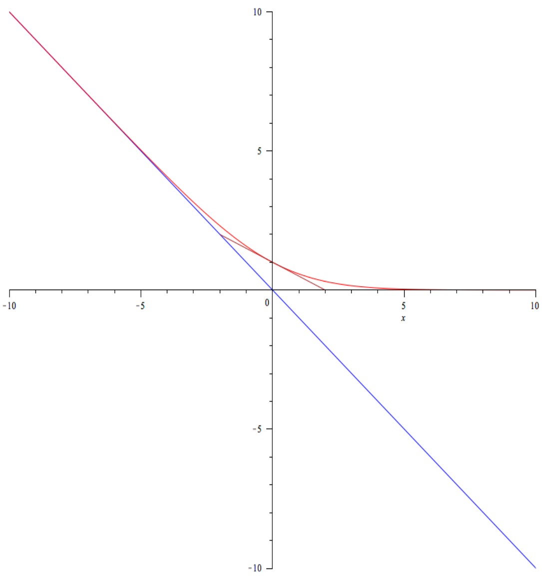
(c)
- $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} e^x - 1 = -1$ puisque $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} e^x = 0^+$
- $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = 0^+$ car
  — $f(x) = \dfrac{x}{e^x}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e^x}}$
  — $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ puisque $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
  — $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 1 - \dfrac{1}{e^x} = 1$ puisque $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0^+$

On peut donc dresser le tableau des variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\dfrac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

(d)
- Comme $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = 0^+$ alors la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$
- Comme $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = +\infty$ nous allons étudier cette branche infinie :
  — $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = -1$
  — Alors $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{x}{e^x - 1} + x = \lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{x + xe^x - x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = 0$ car $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} e^x - 1 = -1$ car $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} e^x = 0$
  — Par conséquent, la courbe représentative de f admet la droite $D : y = x$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

(e) Voici l'allure de la courbe représentative de f :


10
5
-10
-5
0
5
x
10
-5
-10