Plan d'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle

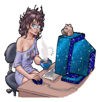
Christian CYRILLE

18 décembre 2025

"En mathématiques, nous sommes d'avantage des serviteurs que des maîtres."
Hermite

Une fonction numérique peut s'étudier en 10 points **sauf dans les cas suivants où l'on peut dessiner sans étude la courbe** $\mathcal{C}_f$ dans un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

1. **La fonction affine** $x \to ax + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:
   la courbe représentative est une droite d'équation $y = ax + b$.
   Pour tracer cette droite, il suffit de déterminer deux de ces points . Pour cela 2 méthodes possibles :
   - **Méthode** 1 :
     — Placer le point ordonnée à l'origine $B(0; b)$ puisqu'en faisant $x = 0$ on obtient $y = a(0) + b = b$
     — Puis en utilisant la pente a, en partant du point B et en avancant d'une unité de longueur parallèlement à l'axe des abscisses puis on monte ou descend de la pente a parallèlement à l'axe des ordonnées, placer le point $A(1; b + a)$
     En effet, pour $x = 1$ on a $y = a(1) + b = a + b$
   - **Méthode** 2 : Déterminer les points d'intersection de cette droite avec les deux axes :
     — Le point d'intersection avec l'axe des ordonnées on obtient l'ordonnée à l'origine $B(0; b)$ puisqu'en faisant $x = 0$ on obtieny $y = a(0) + b = b$
     — Dans le cas où la pente $a \neq 0$ alors le point d'intersection avec l'axe des abscisses est le point $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ puisque $y = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$
     — Dans le cas où la pente $a = 0$ la droite a pour équation $y = b$ et est donc parallèle à l'axe des ordonnées.
2. **La fonction partie entière** $x \to [x] =$ le plus grand entier relatif précédant x qui est une fonction en escalier définie sur $\mathbb{R}$, continue sur chaque segment ouvert $]n; n + 1[$ où $n \in \mathbb{Z}$ et continue à droite en tout $n \in \mathbb{Z}$
3. **La fonction homographique** $x \to \frac{ax + b}{cx + d}$ où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$:
   la courbe représentative est une hyperbole d'équation $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ayant pour asymptotes les droites d'équation $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ et pour centre de symétrie le point d'intersection de ces 2 asymptotes : $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$
4. **La fonction trinôme** $x \to ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$:
   sa courbe représentative est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ et d'axe de symétrie la droite $D : x = -\frac{b}{2a}$
5. les **4 fonctions circulaires** $x \to \sin(x)$, $x \to \cos(x)$, $x \to tan(x)$ et $x \to cotan(x)$
6. **la fonction** $f = -g$:
   si l'on connaît $\mathcal{C}_g$ alors $\mathcal{C}_f$ est l'image de C_g par la symétrie d'axe l'axe des abscisses.
7. **la fonction** $f = |g|$:
   si l'on connaît $\mathcal{C}_g$ alors $\mathcal{C}_f$ coïncide avec C_g pour tout x tel que $g(x) \geq 0$ et $\mathcal{C}_f$ coïncide avec $\mathcal{C}_{-g}$ pour tout x tel que $g(x) \leq 0$.

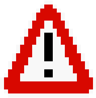


1 Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de f s'il n'est pas donné directement par l'énoncé.

2 Simplification éventuelle de $f(x)$

Simplifier si cela est possible $f(x)$.
Attention, il ne faut jamais simplifier avant d'avoir cherché l'ensemble de définition..



Exemple, pour $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = x+1$

3 Parité, imparité,périodicité

Une fonction f est **paire** dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ lorsque les 2 conditions suivantes sont réalisées :

1. D_f est centré en 0 c'est-à-dire D_f admet O comme centre de symétrie c'est-à-dire $\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$
2. $\forall x \in D_f$, on a $f(-x) = f(x)$

Lorsque f est **paire dans un repère** $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\mathcal{C}_f$admet l'axe des ordonnées, la droite d'équation $y = 0$ comme axe de symétrie.
Une fonction f est **impaire dans un repère** $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ lorsque les 2 conditions suivantes sont réalisées :

1. D_f est centré en 0 c'est-à-dire D_f admet O comme centre de symétrie c'est-à-dire $\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$
2. $\forall x \in D_f$, on a $f(-x) = -f(x)$

Lorsque f est **impaire** dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\mathcal{C}_f$ admet le point O comme centre de symétrie.
Une fonction f est **périodique de période T $>$ 0 dans un repère** $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ lorsque les 2 conditions suivantes sont réalisées :

1. $\forall x \in D_f$, on a $x + T \in D_f$
2. $\forall x \in D_f$, on a $f(x+T) = f(x)$

Lorsque f est **périodique de période** T dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\mathcal{C}_f$ est globalement invariante par la translation horizontale de vecteur $t\vec{i}$.

3.1 Axe de symétrie

La droite $D : x = a$ dans le repère $\mathcal{R}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$

$$\Updownarrow$$

Dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega(a,0)_{\mathcal{R}}; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe a pour équation $Y = g(X)$ où g est paire dans $\mathcal{R}'$.
On utilise pour cela les formules de changement de coordonnées :
$M(x,y)$ dans $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$a pour coordonnées $((X,Y)$ dans $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ avec $X = x - a$ et $Y = y$

$$\Updownarrow$$

Pour tout h tel que $a + h \in D_f$ on a $a - h \in D_f$ et $f(a+h) = f(a-h)$

$$\Updownarrow$$

Pour tout x tel que $x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$

3.2 Centre de symétrie

Le point $\Omega(a;b)_{\mathcal{R}}$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

$$\Updownarrow$$

Dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe a pour équation $Y = g(X)$ où g est impaire dans $\mathcal{R}'$.
On utilise pour cela les formules de changement de coordonnées :
$M(x,y)$ dans $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$a pour coordonnées $((X,Y)$ dans $\mathcal{R}' = (\Omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $X = x - a$ et $Y = y - b$

$$\Updownarrow$$

Pour tout h tel que $a + h \in D_f$ on a $a - h \in D_f$ et $f(a+h) + f(a-h) = 2b$

$$\Updownarrow$$

Pour tout x tel que $x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

4 Dérivabilité ; continuité

1. On étudie d'abord la dérivabilité puis la continuité de f sur les intervalles formant l'ensemble d'étude.
2. On fera une étude spécifique aux points charnières lors que f est une fonction définie par morceaux.
3. On pourra utiliser le résultat suivant : si une fonction f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0

5 Etude des variations

5.1 Méthode 1

On étudie le signe du nombre dérivé $f'(x)$ (lorsqu'il n'est pas évident) en résolvant séparément par équivalence logique :

1. l'équation $f'(x) = 0$
2. l'inéquation $f'(x) > 0$

Sur tout intervalle I où $f'(x) > 0$, f est strictement croissante.
Sur tout intervalle I où $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante.

5.2 Méthode 2

Pour déterminer les variations de f, au lieu de déterminer le signe du nombre dérivé, on peut aussi utiliser les théorèmes suivants :

1. La somme $g + h$ de 2 fonctions g et h croissantes sur un intervalle I est croissante sur I
2. La somme $g + h$ de 2 fonctions g et h décroissantes sur un intervalle I est décroissante sur I
3. La composée $h \circ g$ d'une fonction croissante g sur I et d'une fonction croissante h sur J avec $J \subset f < I >$ est croissante sur I
4. La composée $h \circ g$ d'une fonction décroissante g sur I et d'une fonction décroissante h sur J avec $J \subset f < I >$ est croissante sur I
5. La composée $h \circ g$ d'une fonction croissante g sur I et d'une fonction décroissante h sur J avec $J \subset f < I >$ est décroissante sur I
6. La composée $h \circ g$ d'une fonction décroissante g sur I et d'une fonction croissante h sur J avec $J \subset f < I >$ est décroissante sur I

6 Etude des limites

On étudie les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

7 Tableau de variations

On dresse alors le tableau des variations de f.
Il ne doit pas y avoir de contradiction entre les limites et les variations de f.

8 Tableau des valeurs et points remarquables

On dresse un tableau de valeurs de $f(x)$ en précisant :

- le point d'intersection M(0,f(0)) de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des ordonnées lorsque $0 \in D_f$
- les points éventuels d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses. Ces points ont pour abscisses les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$

9 Etude des branches infinies

A l'aide des limites , on étudie les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ (asymptotes, branches paraboliques, directions asymptotiques, ...)
Il faut en particulier préciser :

- les points éventuels d'intersection de la courbe et de ses asymptotes
- la position relative de la courbe et des asymptotes.

10 Représentation graphique

- On dessine alors $\mathcal{C}_f$ en respectant le type de repère et les unités de longueur imposés par l'énoncé.
- Les pentes des tangentes aux points remarquables doivent être dessinées.
- La courbe doit être légendée.
- Il ne faut pas oublier les symétries et périodicités éventuelles.

11 Retour sur les branches infinies

11.1 Définition

On dit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction numérique d'une variable réelle f présente une branche infinie lorsque l'on est dans l'un des 4 cas suivants :

1. x tend vers $+\infty$
2. x tend vers $-\infty$
3. $f(x)$ tend vers $+\infty$
4. $f(x)$ tend vers $-\infty$

Attention ! ! ! Deux de ces quatre conditions peuvent apparaître simultanément.

11.2 Droites asymptotes

1. **parallèles à l'axe des ordonnées** Lorsque l'on est en présence d'un des 4 cas suivants :
   (a) quand x tend vers x_0^+ on a $f(x)$ qui tend vers $+\infty$
   (b) quand x tend vers x_0^+ on a $f(x)$ qui tend vers $-\infty$
   (c) quand x tend vers x_0^- on a $f(x)$ qui tend vers $+\infty$
   (d) quand x tend vers x_0^- on a $f(x)$ qui tend vers $-\infty$

   Alors la droite (D) d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de x_0^+ dans les deux premiers cas (resp. x_0^- dans les deux derniers cas)
2. **parallèles à l'axe des abscisses** Lorsque l'on est en présence d'un des 4 cas suivants :
   (a) quand x tend vers $+\infty$ on a $f(x)$ qui tend vers y_0^+
   (b) quand x tend vers $+\infty$ on a $f(x)$ qui tend vers y_0^-
   (c) quand x tend vers $-\infty$ on a $f(x)$ qui tend vers y_0^+
   (d) quand x tend vers $-\infty$ on a $f(x)$ qui tend vers y_0^-

   Alors la droite (D) d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ dans les deux premiers cas (resp. $-\infty$ dans les deux derniers cas)
3. **obliques** Lorsque l'on est en présence d'un des 2 cas suivants :
   (a) $f(x) = ax + b + \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \epsilon(x) = 0$
   (b) $f(x) = ax + b + \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \epsilon(x) = 0$

   Alors la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ dans le premier cas (resp. $-\infty$ dans le deuxième cas)

11.3 Courbes asymptotes et Positions relatives

Lorsque l'on est en présence d'un des 2 cas suivants :

- $f(x) = g(x) + \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \epsilon(x) = 0$
- $f(x) = g(x) + \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \epsilon(x) = 0$

Alors la courbe $\mathcal{C}_g$ d'équation $y = g(x)$ est une courbe-asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ dans le premier cas (resp. $-\infty$ dans le deuxième cas)

11.3.1 Positions relatives d'une courbe et de son asymptote

Pour déterminer les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ par rapport à son asymptote $\mathcal{C}_g$d'équation $y = g(x)$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$

- Les x éventuels annulant $f(x) - g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
- Les x éventuels tels que $f(x) - g(x) > 0$ sont les abscisses des points tels que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$
- Les x éventuels tels que $f(x) - g(x) < 0$ sont les abscisses des points tels que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$

11.3.2 Exemple : les fonctions hyperboliques *sh* et *ch*

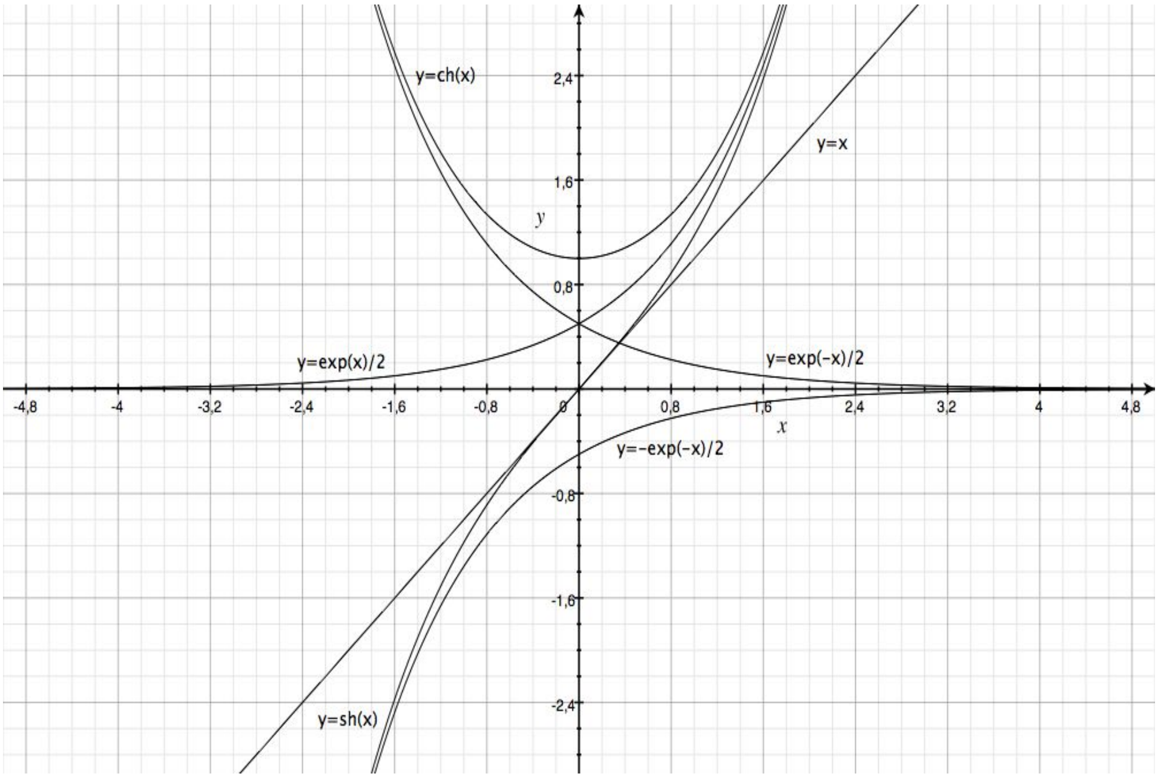
1. Soit $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}; ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}; f(x) = \dfrac{e^x}{2}; g(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}; k(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2}$
2. $D_{sh} = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_{sh}$ on a $-x \in D_{sh}$. Alors $sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)$ donc sh est impaire
3. Comme la courbe de sh admet O comme centre de symétrie, il suffit d'étudier sh sur $\mathbb{R}^+$.
   sh est la différence de f et de g qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $sh'(x) = ch(x) > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sh(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-x} = 0$
   On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de sh :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sh(x) - f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} -\dfrac{e^{-x}}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
5. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $sh(x) - f(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2} < 0$ alors C_{sh} est en dessous de C_f
6. Comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} sh(x) - k(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{e^x}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe C_k
7. $D_{ch} = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_{ch}$ on a $-x \in D_{ch}$. Alors , $ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$ donc ch est paire
8. Comme la courbe de ch admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, il suffit d'étudier ch sur $\mathbb{R}^+$.
   ch est la somme de f et de g qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $ch'(x) = sh(x) \geq 0$. $ch'(x)$ ne s'annule qu'en 0 alors ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} ch(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-x} = 0$
   On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

9. Comme $\lim_{x\mapsto+\infty} ch(x) - f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{ch} de ch admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
10. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $ch(x) - f(x) = \frac{e^{-x}}{2} > 0$ alors C_{ch} est au dessus de C_f
11. Comme $\lim_{x\mapsto-\infty} ch(x) - g(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{e^{x}}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe C_g
12. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $ch(x) - g(x) = \frac{e^{x}}{2} > 0$ alors C_{ch} est au dessus de C_g



11.4 Branches paraboliques et directions asymptotiques

$On\ dtermine \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x}$	Alors $\mathcal{C}_f$ admet	
ou cette limite vaut 0	une branche parabolique de direction (Ox)	$Exemple f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = ln(x)$
ou cette limite vaut ∞	une branche parabolique de direction (Oy)	$Exemple f(x) = x^2$ ou $f(x) = exp(x)$
ou cette limite vaut $a \neq 0$	On détermine $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - ax$	alors
	ou elle vaut b	$D : y = ax + b$ est une asymptote oblique
	ou elle vaut ∞	$D : y = ax$ est une direction asymptotique

12 Equations $f(x) = m$; $f(x) = mx$

12.1 Application numérique non injective et non surjective

"Je doute, j'hésite, je me trompe, je médite, je change de direction ... donc j'apprends."
Proverbe khirkize -17éme siècle

Préambule :
Soient E et F des ensembles. On dit qu'une relation f de E vers F est une application de E vers F lorsque tout élément de E a une image et une seule par f dans F. On appelle $f < E >$ le sous-ensemble de F , ayant pour éléments les images des éléments de E par f. On dit qu'une application f de E vers F est injective lorsque deux éléments quelconques distincts de E ont deux images distinctes dans F. On dit qu'une application f de E vers F est surjective lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E. On dit qu'une application f de E vers F est bijective lorsque f est injective et surjective.
Sujet :
Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$$

On appellera (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que f est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
2. Etudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé. (unité graphique : 3 cm). Préciser les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère ainsi que son asymptote.
3. Démontrer que (C_f) a un axe de symétrie que l'on précisera.
4. (a) Résoudre graphiquement, en discutant selon m, l'équation suivante (E) : $f(x) = m$ d'inconnue réelle x et où m est un paramètre réel
   (b) Retrouver les mêmes résultats par une méthode algébrique.
5. (a) L'application f est-elle injective ?
   (b) Déterminer l'ensemble-image de $\mathbb{R}$ par f noté $f < \mathbb{R} >$.
   (c) L'application f est-elle surjective ? Justifier .
   (d) L'application f est-elle bijective ? Justifier.

12.2 Corrigé

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$
On appellera (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. $D_f = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $x^2 + x - 1$ qui existe ainsi que $x^2 + x + 1$ et en plus, $x^2 + x + 1 \neq 0$ car son discriminant $\Delta = -3 < 0$. Comme $D_f = \mathbb{R}$ tout réel x a donc une et une seule image $f(x)$ donc f est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
2. (a) $D_f = \mathbb{R}$
   (b) On ne peut simplifier $f(x)$
   (c) $D_f = \mathbb{R}$ est bien centré en 0 mais $f(-x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1} \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$ donc f est ni paire, ni impaire dans $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. On étudiera f sur $E_f = \mathbb{R}$.
   (d) f étant une fonction fraction rationnelle est donc dérivable donc continue sur son ensemble de définition : $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a :
   $f'(x) = \dfrac{(2x + 1)(x^2 + x + 1) - (x^2 + x - 1)(2x + 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$
   $= \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 2x + x^2 + x + 1 - [2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 2x - 1]}{(x^2 - x + 1)^2} = \dfrac{4x + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$.
   Comme $(x^2 - x + 1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui du binôme $4x + 2$
   (e) • Comme f est une fonction fraction rationnelle, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$
- donc C_f admet au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ la droite (D) d'équation $y = 1$

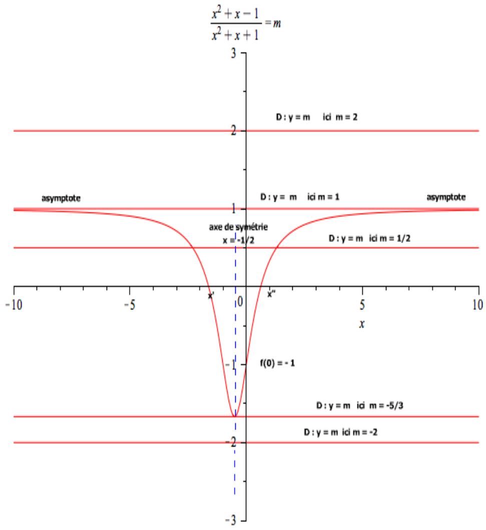
(f)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 $\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$ 1

(g) i. $C_f \cap (Oy) = \{M(0; f(0))\} = \{M(0; -1)\}$

ii. $f(x) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = x' = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *ou* $x = x" = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

donc $C_f \cap (Ox) = \{M_1(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0); M_2(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; 0)\}$



3. Prouvons (C_f) admet D' : $x = -\dfrac{1}{2}$ comme axe de symétrie. Pour cela posons $a = -\dfrac{1}{2}$ alors $2a - x = -1 - x$
   (a) Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R}$ l'on a bien $-1 - x \in \mathbb{R}$ donc $2a - x = -1 - x \in D_f$
   (b) $f(2a - x) = f(-1 - x) = \dfrac{(-1-x)^2 - 1 - x - 1}{(-1-x)^2 - 1 - x + 1} = \dfrac{1 + 2x + x^2 - 1 - x - 1}{1 + 2x + x^2 - 1 - x + 1} = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} = f(x)$
   (c) Donc (C_f) admet D' : $x = -\dfrac{1}{2}$ comme axe de symétrie.
4. (a) Résolution graphique de (E) : $f(x) = m$:
   $f(x) = m \iff x$ est l'abscisse éventuelle des points d'intersection de C_f et de la droite $D_m : y = m$
   - ou bien $m < -\dfrac{5}{3}$ alors pas de point d'intersection de C_f et de D_m donc pas de solution pour (E)
   - ou bien $m = -\dfrac{5}{3}$ alors un seul point d'intersection $M(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3})$ de C_f et de D_m
     donc une seule solution $x = -\dfrac{1}{2}$ pour (E)
   - ou bien $-\dfrac{5}{3} < m < 1$ alors deux points d'intersection de C_f et de D_m donc deux solutions x' et $x"$ pour (E)
   - ou bien $1 \leq m$ alors pas de point d'intersection de C_f et de D_m donc pas de solution pour (E)

   (b) Résolution algébrique de (E) : $f(x) = m$:
   $f(x) = m \iff \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} = m \iff x^2 + x - 1 = m(x^2 + x + 1) \iff (1-m)x^2 + (1-m)x - 1 - m = 0$
   - ou bien $m = 1$ alors (E) : $0x^2 + 0x - 2 = 0$ pas de solution

- ou bien $m \neq 1$ donc (E) est bien de degré 2
  $\Delta = (1-m)^2 - 4(1-m)((-1-m) = (1-m)[(1-m) + 4(1+m)] = (1-m)(5+3m)$
  Δ est un trinôme de variable m de racines 1 et $\frac{-5}{3}$, d'après le théorème du signe du trinôme on peut donc dire que :
-

m	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$\Delta = (1-m)(5+3m)$		$-$	0	$+$	//	$+$	

i. si $m = \frac{-5}{3}$ alors $\Delta = 0$ donc (E) a une seule solution $x = \frac{-1}{2}$

ii. si $\frac{-5}{3} < m < 1$ alors $\Delta > 0$ donc (E) a deux solutions x' et x"

iii. si $m < \frac{-5}{3}$ ou $m > 1$ alors $\Delta < 0$ donc (E) n'a pas de solutions.

5. (a) L'application f n'est pas injective car $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) = 0$ et $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = 0$.

   (b) D'après l'étude des variations de f alors l'ensemble-image $f < \mathbb{R} >= [-\frac{5}{3}; 1[$.

   (c) L'application f n'est pas surjective car $f < \mathbb{R} > \neq \mathbb{R}$. En effet, il suffit de choisir un $y \notin [-\frac{5}{3}; 1[$. cet y n'a pas d'antécédent par f dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}$.

   (d) L'application f n'est donc pas bijective car f n'est pas injective. On pourrait dire aussi que l'application f n'est donc pas bijective car f n'est pas surjective.

12.3 Equations $f(x) = m$ et $f(x) = mx$

1. Soit la famille de fonctions numériques d'une variable réelle (f_m) où m est un paramètre réel et f_m est définie par
$$f_m(x) = \frac{m\ x^3}{(1-x)^2}$$
On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Démontrer que $\forall m \in \mathbb{R} \quad \mathcal{C}_m$ admet au moins un point fixe dont on donnera les coordonnées.
2. Soit la fonction f_1.
   (a) Déterminer des réels A, B, C et D tels que $f_1(x) = Ax + B + \dfrac{C}{1-x} + \dfrac{D}{(1-1)^2}$.
   Cei s'appelle la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$
   (b) Etudier la fonction f_1 et représenter f_1 dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Soit la fonction f_{-1}. Construisez sans étudier f_{-1} sa courbe représentative $\mathcal{C}_{-1}$ dans un repère orthonormé
4. Construisez aussi sans étudier h la courbe $\mathcal{C}_h$ dans un repère orthonormé lorsque
$$h(x) = \frac{|x|^3}{(1-x)^2}$$
5. Résoudre graphiquement l'équation suivante d'inconnue réelle x et de paramètre $m \in \mathbb{R}$. :
$$x^3 - mx^2 + 2mx - m = 0$$
6. Déterminer graphiquement, le nombre et le signe des solutions de l'équation d'inconnue x :
$$x^3(1-m) + 2mx^2 - mx = 0$$
7. Retrouvez les résultats de la question précédente par une méthode algébrique.

12.3.1 Corrigé

1.
   - mx^3 existe pour tout réel x
   - $(1-x)^2$ existe pour tout réel x
   - $(1-x)^2 = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$

   Par conséquent, l'ensemble de définition de f_m est $\mathbb{R} - \{1\}$.
   Il est évident que si $x = 0$ alors $f_m(0) = \dfrac{m\ 0^3}{(1-x)^2} = 0$.
   Donc $\forall m \in \mathbb{R} \quad \mathcal{C}_m$ admet au moins un point fixe $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

2. $f_1(x) = \dfrac{x^3}{(1-x)^2}$.
   (a) $\forall x \neq 1 \quad f_1(x) = Ax + B + \dfrac{C}{1-x} + \dfrac{D}{(1-x)^2} \iff \dfrac{x^3}{(1-x)^2} = \dfrac{(Ax+B)(x-1)^2 + C(1-x) + D}{(1-x)^2}$
   $\iff x^3 = (Ax+B)(1-x)^2 + C(1-x) + D \iff x^3 = (Ax+B)(1-2x+x^2) + C(1-x) + D$
   $$\iff x^3 = Ax^3 + x^2(B-2A) + x(A-2B+C) + B + C + D \iff \begin{cases} A = 1 \\ B - 2A = 0 \\ A - 2B - C = 0 \\ B + C + D = 0 \end{cases}$$
   par identification des coefficients des monômes respectifs.

Donc $\forall x \neq 1 \quad f_1(x) = Ax + B + \dfrac{C}{1-x} + \dfrac{D}{(1-x)^2} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -3 \\ D = 1 \end{cases}$

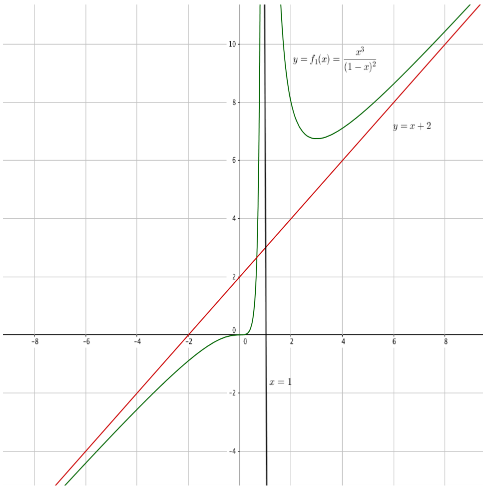
Par conséquent,

$$\forall x \neq 1 \quad \frac{x^3}{(1-x)^2} = x + 2 - \frac{3}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

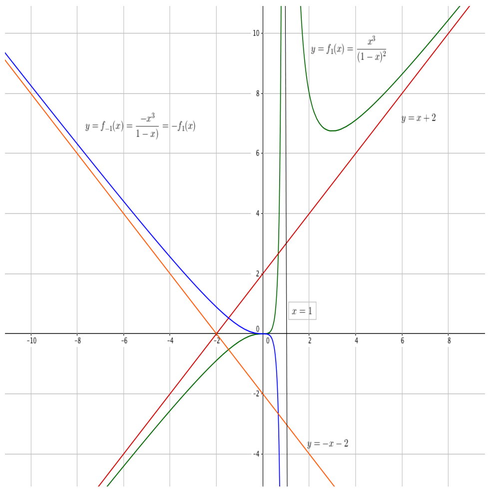
(b)
- f_1 est une fonction rationnelle car c'est le quotient de deux fonctions polynômes donc f_1 est dérivable (donc continue)sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} - \{1\}$
- $\forall x \neq 1 \quad f'(x) = \dfrac{3x^2(1-x)^2 - x^3\ 2\ (-1)(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{x^2(1-x)(3(1-x)+2x)}{(1-x)^4} = \dfrac{x^2(1-x)(3-x)}{(1-x)^4}$
  Comme $\forall x \neq 1 \quad (1-x)^4 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2(1-x)(3-x)$
-

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$(1-x)(3-x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(1-x)^4$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$\dfrac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- — $f(0) = 0$
  — $f(3) = \dfrac{27}{4}$
  — i. $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f_1(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} x^3 = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} (1-x)^2 = 0^+$
  ii. $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f_1(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} x^3 = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} (1-x)^2 = 0^+$
  iii. La courbe de f_1 admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 1$
  — i. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$
  ii.
  iii. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} x = -\infty$
  iv. Etudions ces deux branches infinies :
  A. $\lim x \mapsto +\infty \dfrac{f(x)}{x} = \lim x \mapsto +\infty \dfrac{x^3}{x(1-x)^2} = \lim x \mapsto +\infty \dfrac{x^3}{x^3} = 1$
  B. $\lim x \mapsto +\infty f(x) - x = \lim x \mapsto +\infty \dfrac{x^3}{(1-x)^2} - x = \lim x \mapsto +\infty \dfrac{x^3 - x(1-x)^2}{(1-x)^2}$
  $= \lim x \mapsto +\infty \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$
  C. idem au voisinage de $-\infty$
  D. Par conséquent, au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ la courbe de f admet comme asymtote oblique la droite d'équation $y = x + 2$
-



3. • $f_{-1}(x) = \dfrac{-x^3}{(1-x)^2} = -f_1(x)$ donc sa courbe représentative $\mathcal{C}_{-1}$ en vert est l'image de la courbe rouge $\mathcal{C}_1$ par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses dans le repère orthonormé

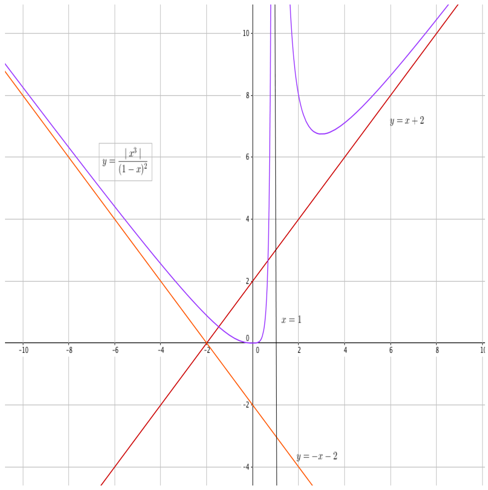


•

.

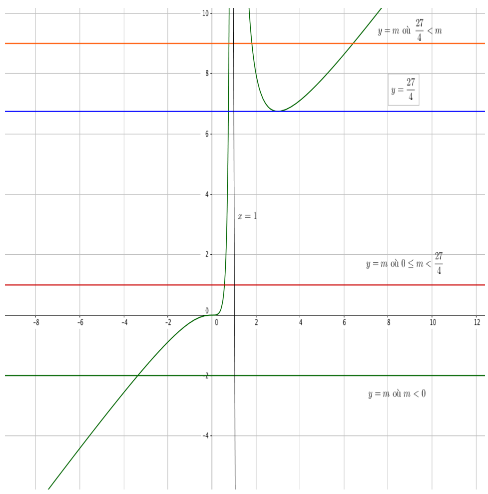
4. • $h(x) = \dfrac{|x|^3}{(1-x)^2} = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(1-x)^2} = f_1(x) \text{ si } x \geq 0 \\ \\ \dfrac{-x^3}{(1-x)^2} = f_{-1}(x) \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

   • Par conséquent, $\mathcal{C} - h$ coïncide avec la courbe verte $\mathcal{C}_{-1}$ sur $]-\infty; 0]$ et avec la courbe rouge $\mathcal{C}_1$ sur $[0; +\infty[$



5. Soit (E) l'équation d'inconnue x :
$$x^3 - mx^2 + 2mx - m = 0$$

   • L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
   • $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^3 - mx^2 + 2mx - m = 0 \iff x^3 = m(x^2 - 2x + 1) \iff x^3 = m(1-x)^2$
   — ou bien $x = 1$
     mais alors $(E) \iff 1 = 0$ donc $x = 1$ ne peut être solution de cette équation.
   — ou bien $x \neq 1$
     alors $(E) \iff \dfrac{x^3}{(1-x)^2} = m \iff f(x) = m$
     $\iff x$ est l'abscisse des points éventuels d'intersection de $\mathcal{C}_{f_1}$ et de la droite d'équation $y = m$
     Par conséquent,
     — si $m < 0$ il y a une seule solution $x' < 0$
     — si $m = 0$ il y a une seule solution $x' = 0$
     — si $0 < m < \dfrac{27}{4}$ il y a une seule solution $0 < x' < 1$
     — si $m = \dfrac{27}{4}$ il y a deux solutions $0 < x' < 1$ et $x" = 3$
     — si $\dfrac{27}{4} < m$ il y a trois solutions $0 < x' < 1$; $1 < x" < 3$ et $3 < x'''$

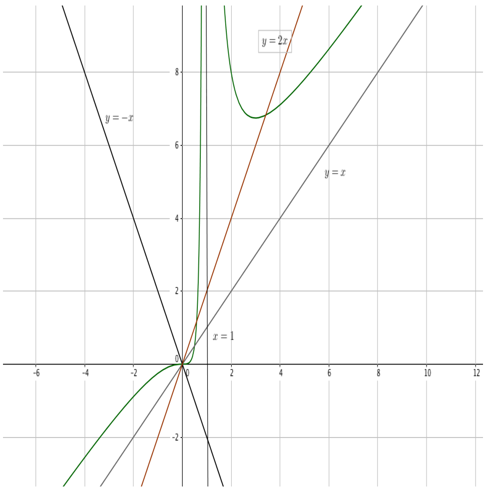


   •

6. Soit (F) l'équation d'inconnue x :

$$x^3(1-m) + 2mx^2 - mx = 0$$

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^3(1-m) + 2mx^2 - mx = 0 \iff x^3 = mx^3 - 2mx^2 + mx \iff x^3 = mx(x^2 - 2x + 1)$
  $\iff x^3 = mx(1-x)^2$
  — ou bien $x = 1$
  mais alors $(F) \iff 1 = 0$ donc $x = 1$ ne peut être solution de cette équation.
  — ou bien $x \neq 1$
  alors $(F) \iff \dfrac{x^3}{(1-x)^2} = mx \iff f(x) = mx$
  $\iff x$ est l'abscisse des points éventuels d'intersection de $\mathcal{C}_{f_1}$ et de la droite d'équation $y = mx$
  Par conséquent,
  — si $m < 0$ il y a une seule solution $x = 0$
  — si $m = 0$ il y a une seule solution $x = 0$
  — si $0 < m < 1$ il y a trois solutions $x' < 0$; $x = 0$ et $0 < x'' < 1$
  — si $m = 1$ il y a deux solutions $x = 0$ et $0 < x' < 1$
  — si $1 < m$ il y a trois solutions $x = 0$; $0 < x' < 1$; $1 < x$"



-

7. On peut retrouver les résultats de la question précédente par une méthode algébrique :
   $x^3(1-m)+2mx^2-mx=0 \iff x[x^2(1-m)+2mx-m]=0 \iff x=0$ ou $x^2(1-m)+2mx-m=0$
   Etudions l'équation (G) : $x^2(1-m)+2mx-m=0$.
   (a) ou bien $m=1$ alors $x^2(1-m)+2mx-m=0 \iff 2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$
   (b) ou bien $m \neq 1$ alors l'équation est de degré 2.
   $\Delta=(2m)^2-4(1-m)(-m)=4\ m^2-\ 4m^2+4\ m=4m$
   - ou bien $m<0$ alors $\Delta<0$ donc (G) n'a pas de solution.
   - ou bien $m=0$ alors $\Delta=0$ et $x=\dfrac{-2m}{2(1-m)}=\dfrac{0}{2}=0$
   - ou bien $m>0$ alors $\Delta>0$ et (G) a deux solutions x' et x".
     Le produit de ces deux solutions $P=x'x" =\dfrac{c}{a}=\dfrac{-m}{1-m}=\dfrac{m}{m-1}$ est du signe de $m-1$ car $m>0$.
     — si $m<1$ alors $P<0$ donc x' et x" sont de signes contraires.
     — si $m>1$ alors $P>0$ donc x' et x" ont le même signe : celui de leur somme $S=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{2m}{m-1}$ qui est du signe de $m-1$ car $m>0$ donc $S>0$ d'où $0<x'<x"$..
   - On retrouve bien les résultats précédents : Par conséquent,
     — si $m<0$ il y a une seule solution $x=0$
     — si $m=0$ il y a une seule solution $x=0$
     — si $0<m<1$ il y a trois solutions $x'<0; x=0$ et $0<x''<1$
     — si $m=1$ il y a deux solutions $x=0$ et $0<x'<1$
     — si $1<m$ il y a trois solutions $x=0$; $0<x'<1$; $1<x"$

13 Autres Exercices

13.1 $f(x) = x^x$

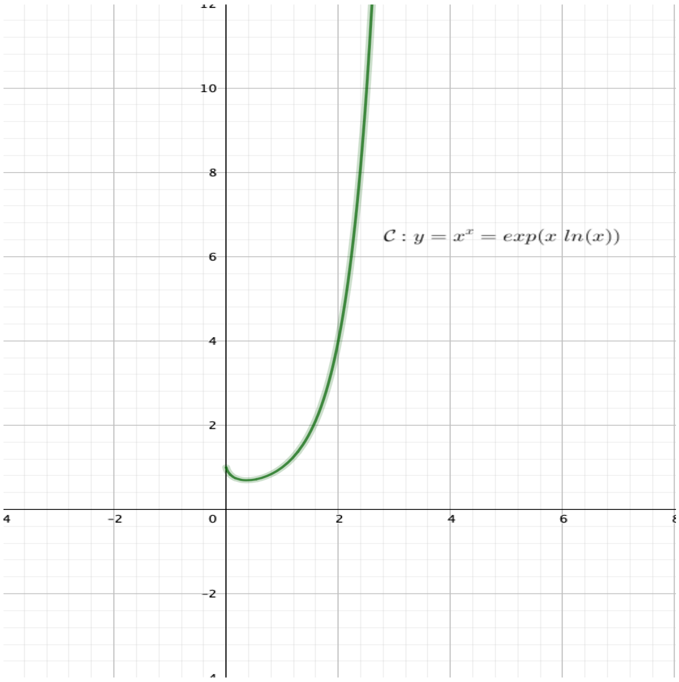
Etudier et représenter la fonction numérique f définie par $f(x) = x^x$.

On sait que pour $\forall a > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad a^b = e^{b\ ln(a)}$. Donc $x^x = e^{x\ ln(x)}$.

1. $\mathcal{D}_f = \{x/xln(x) \text{ existe } \} = \{x/ln(x) \text{ existe } \} = \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$
2. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car :
   - f est la composée de $x \mapsto xln(x)$ et de exp
   - $x \mapsto xln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car elle est le produit de $x \mapsto$ fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0; +\infty[$ et de ln dérivable sur $]0; +\infty[$
   - $\forall x > 0 \quad xln(x) \in \mathbb{R}$
   - exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant la formule $(e^u)' = u'e^u$ et $(uv)' = u'v + uv'$
   $\forall x > 0 \quad f'(x) = (xln(x))'e^{xln(x)} = (1ln(x) + x\frac{1}{x})e^{xln(x)} = (ln(x) + 1)e^{xln(x)}$
   Comme $e^{xln(x)} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $ln(x) + 1$
   - $f'(x) = 0 \iff ln(x) + 1 = 0 \iff ln(x) = -1 \iff exp(ln(x)) = exp(-1)$ car exp est bijective $\iff x = e^{-1} \iff x = \frac{1}{e}$
   - $f'(x) > 0 \iff ln(x) + 1 > 0 \iff ln(x) > -1 \iff exp(ln(x)) > exp(-1)$ car exp est strictement croissante
     $\iff x > e^{-1} \iff \frac{1}{e}$
   - Sur $]0; \frac{1}{e}[\qquad f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante
   - Sur $]\frac{1}{e}; +\infty[\qquad f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante
   - En $x = \frac{1}{e} \qquad f'(x) = 0$ et change de signe alors f admet un minimum qui vaut $f\left(\frac{1}{e}\right) = exp\left(\frac{1}{e}\right)$
4. - Quand x tend vers 0^+ alors $xln(x)$ tend vers 0^- alors $e^{xln(x)}$ tend vers $e^0 = 1$.
     $\mathcal{C}_f$ a donc **un point limite** le point de coordonnées $(0; 1)$
   - Quand x tend vers $+\infty$ alors $xln(x)$ tend vers $+\infty$ alors $e^{xln(x)}$ tend vers $+\infty$
   - $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^x}{x} = x^{x-1} = exp((x-1)ln(x))$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ donc présente au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
   -

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{e}^{\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut remarquer que $f(1) = 1^1 = 1$, la pente de la tangente au point de coordonnées $(1; 1)$ est $f'(1) = 1$
On peut remarquer que $f(2) = 2^2 = 4$.



13.2 Inégalité des accroissements finis

13.2.1 Encadrement

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'on a : $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
2. Trouver une valeur approchée de $ln(\pi)$ en utilisant l'intervalle $[3; \pi]$
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'on a : $\dfrac{1}{n+1} \leq ln(n+1) - ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$
4. Soient les réels α et β tels que $0 < \alpha \leq \beta < \dfrac{\pi}{2}$.
   Démontrer que $\dfrac{\beta - \alpha}{cos^2(\alpha)} \leq tan(\beta) - tan(\alpha) \leq \dfrac{\beta - \alpha}{cos^2(\beta)}$.
   En déduire un encadrement de $tan(0,78)$ et de $tan(0,8)$

13.2.2 Sens de variation des fonctions $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ et de $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$

1. A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que

$$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire le sens de variations et la limite en $+\infty$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

1. - Comme $x > 0$ on pose $a = x$ et $b = x+1$ donc $a < b$ et $a - b = x + 1 - x = 1$.
   - ln est continue sur $[x\ ;\ x+1]$ car ln est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $[x\ ;\ x+1] \subset 0\ ;\ +\infty[$
   - ln est dérivable sur $]x\ ;\ x+1[$ car ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $]x\ ;\ x+1[\subset 0\ ;\ +\infty[$
   - Donc d'après le théorème des accroissements finis on peut dire :

$$\exists c \in]x\ ;\ x+1[\qquad ln(x+1) - ln(x) = (ln)'(c) = \frac{1}{c}$$

   - Par conséquent, comme $x < c < x+1$ alors $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ donc

$$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \frac{1}{x}$$

2. - Soit f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = exp\left[x\ ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = exp\left[x\ ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$
     - ◇ $\forall x > 0 \quad f(x) = exp[x(ln(x+1) - ln(x)] = exp[x\ ln(x+1) - x\ ln(x)]$
     - ◇ f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$
     - ◇ $\forall x > 0 \quad f'(x) = [x\ ln(x+1) - x\ ln(x)]'\ exp[x\ ln(x+1) - x\ ln(x)]$

$$f'(x) = \left[1\ ln(x+1) + x\frac{1}{x+1} - 1\ ln(x) - x\frac{1}{x}\right]'\ exp[x\ ln(x+1) - x\ ln(x)]$$
$$f'(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) + \frac{x}{x+1} - 1\right]\ exp[x\ ln(x+1) - x\ ln(x)]$$
$$f'(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) + \frac{x-(x+1)}{x+1}\right]\ exp[x\ ln(x+1) - x\ ln(x)]$$
$$f'(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x+1}\right]\ exp[x\ ln(x+1) - x\ ln(x)]$$

     - ◇ Le signe de $f'(x)$ est celui de $h(x) = \left[ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x+1}\right]$ car $exp[x\ ln(x+1) - x\ ln(x)] > 0$
       - ⋆ h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$
       - ⋆ $\forall x > 0$ on a :

$$h'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

       - ⋆ $\forall x > 0$ on a $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
       - ⋆ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0$. Comme de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$
       - ⋆ Comme h est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ alors $\forall x > 0 \quad h(x) > 0$
     - ◇ Par conséquent, $\forall x > 0 \quad f'(x) = h(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
     - ◇ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$ car
       - ⋆ en posant $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ alors $l(y) = ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = x\ ln\left[1+\frac{1}{x}\right] = \frac{ln\left[1+\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}}$
       - ⋆ En posant $h = \frac{1}{x}$ alors $ln(y) = \frac{ln(1+h)}{h}$

- ⋆ Quand $x \to +\infty$ alors $h \to 0$ d'où $ln(y) = \dfrac{ln(1+h)}{h} = \dfrac{ln(1+h) - ln(1)}{1+h-1} \to (ln)'(1) = 1$ item
  [⋆] $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(y) = \lim\limits_{h \to 0} ln(y) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} y = exp(1) = e$

◇ Voici alors le tableau des variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	e

- Soit g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = f(x)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = f(x) + \dfrac{1}{x}f(x)$

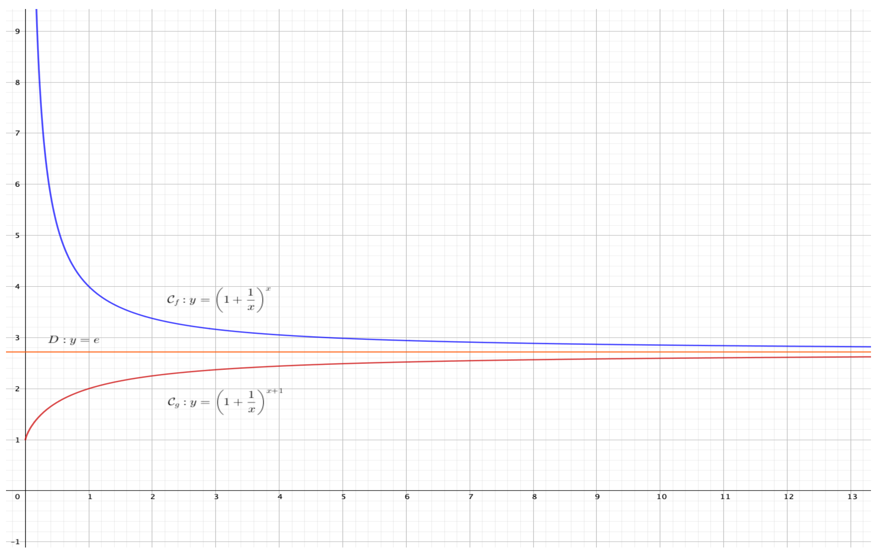
◇ Comme $x \to \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ alors g qui est le produit des ces deux fonctions est alors dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

◇ ⋆ $\forall x > 0 \quad g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = exp\left[(x+1)ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right] = exp\left[(x+1)ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]$
$g(x) = exp[(x+1)[ln(x+1) - ln(x)]] = exp[(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]$
⋆ $\forall x > 0 \quad g'(x) = [(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]'\ exp[(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]$
Comme $exp[(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)] > 0$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $u'(x)$ avec $u(x) = [(x+1)ln(x+1) - (x+1)ln(x)]$.
⋆ $u'(x) = ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - ln(x) - (x+1)\dfrac{1}{x}$
$u'(x) = ln(x+1) + 1 - ln(x) - \dfrac{x+1}{x} = ln(x+1) + 1 - ln(x) - 1 - \dfrac{1}{x} = ln(x+1) - ln(x) - \dfrac{1}{x}$
⋆ Or d'après la question précédente on sait que $ln(x+1) - ln(x) < \dfrac{1}{x}$ donc $u'(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$ d'où g est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

◇ Comme $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x}f(x)$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = e$

◇ On peut alors dresser le tableau des variations de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$	e



13.3 Etude dérivabilité et continuité d'une fonction définie par morceaux

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$
2. Démontrer que f est continue en 0. Conclusion ?
3. Démontrer que f est paire.
4. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
5. Démontrer que f est dérivable en 0. Conclusion ?
6. Représenter graphiquement la fonction f.

13.4 Etude de la fonction hyperbolique $x \mapsto th(x)$

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{sh(x)}{ch(x)} = th(x)$$

.

1. Etudier la fonction f. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère.
2. Démontrer f est bijective et admet une bijection réciproque $Argth$ définie sur $J =]-1; 1[$
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 1 - [f(x)]^2$.
4. En déduire que $Argth$ est dérivable sur J et déterminer $(Argth)'(y)$ pour tout $y \in J$.

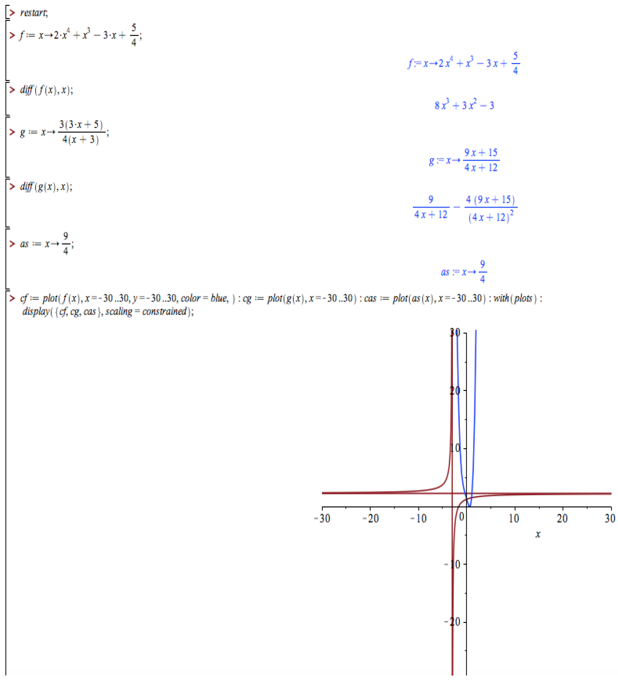
13.5 Intersection de deux courbes

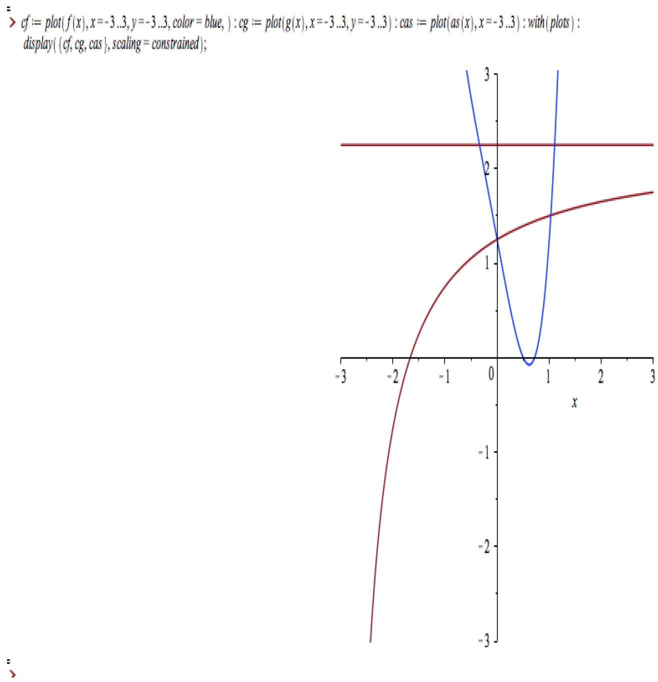
Soient les fonctions suivantes f et g définies respectivement par $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x + \dfrac{5}{4}$ et $g(x) = \dfrac{3(3x+5)}{4(x+3)}$.

Soit le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la fonction f et représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_f$ de f dans le repère $\mathcal{R}$
2. Etudier la fonction g et représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_g$ de f dans le même repère $\mathcal{R}$
3. Démontrer que les deux courbes coupent l'axe des ordonnées au même point A dont on déterminera les coordonnées.
4. Démontrer que les tangentes en A aux deux courbes sont perpendiculaires.

13.5.1 Corrigé





13.6 Etude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

"Étudier sans réfléchir est une occupation vaine ; réfléchir sans étudier est dangereux."
Confucius (555 - 479 avJC) - Chine

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

   Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$
4. On admet la Formule dite de Taylor-Young : Si g est de classe C^n sur un intervalle de bornes a et $a + h$ et admet une dérivée d'ordre $n + 1$ en a alors $g(a + h) = g(a) + \dfrac{h}{1!}g'(a) + \cdots + \dfrac{h^n}{n!}g^{(n)}(a) + \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}[g^{(n+1)}(a) + \varepsilon(h)]$ avec $\lim\limits_{h \mapsto 0} \varepsilon(h) = 0$.
   (a) Montrer alors que, pour tout x non nul, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \mapsto 0} \epsilon(x) = 0$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$
5. (a) Etudier les variations de la fonction g définie par :
   $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x\ e^x - e^x + 1$
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
   (c) Dessiner l'allure de la courbe représentative de f
6. On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
7. (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = f(-x)$
   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante
8. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite
9. Ecrire un programme Pascal permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$ dans le cas où $u_0 = 1$

13.7 Fonction rationnelle

1. Soit la fonction numérique f d'une variable réelle définie sur $]2;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{x - 2}$$
On note (C) sa courbe représentative dans ls repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \imath, \jmath)$
   (a) Déterminer les réels a, b, c tels que $\forall x \in]2;+\infty[\quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$
   (b) Justifier les limites de f en 2 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes à (C) ainsi que la position de (C) par rapport à ses asymptotes.
   (c) Tracer alors (C) et ses asymptotes.
2. Soit la fonction numérique g d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \frac{3 + x + \sqrt{x^2 - 10x + 81}}{4}$$
On note (C') sa courbe représentative dans ls repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \imath, \jmath)$
   (a) Justifier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Déterminer les asymptotes à (C') ainsi que la position de (C') par rapport à ses asymptotes.
   (b) Déterminer $g'(x)$. Justifier avec soin son signe. En déduire le tableau de variations de g.
   (c) Tracer alors (C) et ses asymptotes dans le même repère que (C)
3. Justifier pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1} puis déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.
Que peut-on en déduire pour les courbes (C) et (C') ?

13.8 Fonctions définies par morceaux

Soit un plan P muni d'un repère cartésien orthonormal $R = (0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

13.8.1 Partie A

1. Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = -x\ln(x) \ si \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
   (a) Etudier la fonction f. Tracer ensuite la courbe représentative Γ de f
   (b) Etudier selon x la position relative de Γ et de la droite $(D) : y = x$
2. Soit la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = -x\ln(|x|) \ si \ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$
   (a) En utilisant le 1°), tracer ensuite la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g
   (b) Soit l'application T de P dans P qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ avec
   $$\begin{cases} x' = e\ x \\ y' = -ex + ey \end{cases}$$
   Déterminer $T < \mathcal{C}_g >$.
3. Soit la suite (u_n) définie par
   $$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) \ si \ n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \left]0\ ;\ \dfrac{1}{e}\right[\end{cases}$$
   Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

13.8.2 Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la suite f_n définie par $\begin{cases} f_n(x) = -x\ ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^n \quad si\ x \in]0; 1] \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$
   (a) Etudier la dérivabilité puis la continuité de f_n sur $[0; 1]$
   (b) Démontrer que f_n admet un maximum a_n sur $]0; 1]$ que l'on calculera.
   (c) On pose $b_n = f_n(a_n)$. Calculer b_n en fonction de n.
2. (a) Démontrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.
   (b) Montrer que $\forall x \in [0; e^{-n}]$ on a $f_n(x) \geq \dfrac{b_n}{a_n} x$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{e^{-n}} f_n(x)dx$
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n \geq J_n$
   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ J_n \geq \dfrac{1}{2}n^n e^{-2n}$
   (c) En déduire que la suite (I_n) est divergente.

13.8.3 Partie A

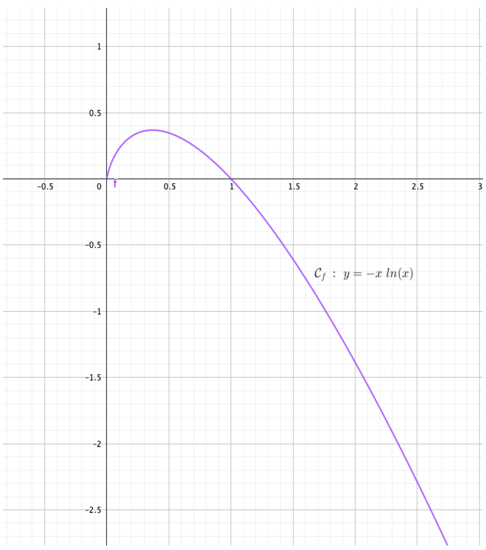
1. Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = -x\ln(x) \ si \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
   (a)
   - $-x\ ln(x)$ est défini sur $]0; +\infty[$ et comme $f(0) = 0$ alors f est définie sur $[0; +\infty[$
   - Id est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable donc continue sur $]0; +\infty[$
   - $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{-x\ ln(x)}{x} = \lim_{x\mapsto 0^+} -ln(x) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 mais sa courbe représentative Γ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.
   - $\forall x > 0, \quad f'(x) = -ln(x) - x\dfrac{1}{x} = -ln(x) - 1$
   - $\forall x > 0 \quad f'(x) = 0 \iff -ln(x) = -1 \iff ln(x) = -1 \iff ln(x) = ln\left(\dfrac{1}{e}\right) \iff x = \dfrac{1}{e}$ car

ln réalise une bijection de R^{+*} sur $\mathbb{R}$.
$\forall x > 0 \quad f'(x) > 0 \iff -ln(x) > 1 \iff ln(x) < -1 \iff ln(x) < ln\left(\frac{1}{e}\right) \iff x < \frac{1}{e}$ ar ln est strictement croissante sur R^{+*}.

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} ln(x) = +\infty$
- On en déduit le tableau de variations suivant :

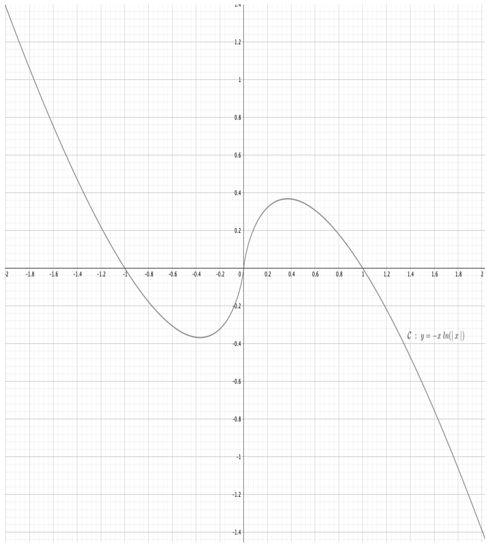
x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

(b) - $\forall x > 0 \quad f(x) - x = -x\ ln(x) - x = -x(ln(x) + 1)$ donc
  - $\forall x > 0 \quad f(x) - x = 0 \iff -x(ln(x)+1) = 0 \iff ln(x) + 1 = 0 \iff ln(x) = -1 \iff ln(x) = ln(e^{-1}) \iff x = e^{-1}$.
  Par conséquent, (Γ) coupe (D) au point d'abscisse $x = e^{-1}$
  - $\forall x > 0 \quad f(x) - x > 0 \iff -x(ln(x)+1) > 0 \iff ln(x) + 1 < 0 \iff ln(x) < -1 \iff ln(x) < ln(e^{-1}) \iff x < e^{-1}$.
  Par conséquent, (Γ) est au dessus de (D) pour tous les points dont l'abscisse est strictement comprise entre 0 et e^{-1}
  - $\forall x > 0 \quad f(x) - x < 0 \iff -x(ln(x)+1) < 0 \iff ln(x) + 1 > 0 \iff ln(x) > -1 \iff ln(x) > ln(e^{-1}) \iff x > e^{-1}$.
  Par conséquent, (Γ) est en dessous de (D) pour tous les points dont l'abscisse est strictement plus grande que e^{-1}
- Si $x = 0$ alors $f(x) - x = 0 - 0 = 0$ donc (Γ) coupe (D) au point d'abscisse $x = 0$



2. $\begin{cases} g(x) = -x\ln(x) = f(x) \ si \ x > 0 \\ g(x) = -x\ln(-x) = -f(-x) \ si \ x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

(a) - $\forall x \neq 0 \quad g(-x) = -(-x)\ ln(|-x|) = x\ ln(|x|) = -g(x)$
- $g(-0) = g(0) = 0 = -0 = -g(0)$
- Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = -g(x)$ donc g es impaire donc $\mathcal{C}_g$ admet O comme centre de symétire.
- On peut alors construire $\mathcal{C}_g$ sachant qu'elle coïncide avec $\mathcal{C}_f$ sur R^+.



(b) $\left\{\begin{array}{l} x' = e\ x \\ y' = -ex + ey \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x'}{e} \\ ey = y' + ex = y' + e\dfrac{x'}{e} = y' + x' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x'}{e} \\ \\ y = \dfrac{y' + x'}{e} \end{array}\right.$

$$M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in T < \mathcal{C}_g > \iff \exists M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_g \quad M' = T(M) \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x'}{e} \\ \\ y = \dfrac{y' + x'}{e} \\ y = -x\ ln(|x|) \end{array}\right.$$

$$\iff \frac{y' + x'}{e} = -\frac{x'}{e}\ ln\left(\left|\frac{x'}{e}\right|\right) \iff \frac{y'}{e} = -\frac{x'}{e} - \frac{x'}{e}ln(|x'|) + \frac{x'}{e}ln(e)$$

$$\iff \frac{y'}{e} = -\frac{x'}{e} - \frac{x'}{e}ln(|x'|) + \frac{x'}{e} \iff \frac{y'}{e} = -\frac{x'}{e}ln(|x'|) \iff y' = -x'ln(|x'|) \iff M' \in \mathcal{C}_g$$

Par conséquent, on a donc $T < \mathcal{C}_g >= \mathcal{C}_g$ donc $\mathcal{C}_g$ est globalement invariante par T.

3. Soit la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = g(u_n)\ si\ n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[\end{array}\right.$$

(a) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$

- Cette propriété est initialisée en 0 car $u_0 \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$
- Cette propriété est héréditaire car si pour un certain entier naturel n on a $u_n \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$ alors d'après le tableau de variations de la fonction on a $f(u_n) \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$.

  Or lorsque $x \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$ on a $g(x) = f(x)$ donc $f(u_n) = g(u_n) = u_{n+1}$.

  Par conséquent, $u_{n+1} \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$
- Comme la propriété est initialisée en 0 et est héréditaire alors elle est vraie pour tout entier naturel n

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$ donc la suite (u_n) est stritcement croissante.

(c) Cette suite est strictement croissante et majorée par $\dfrac{1}{e}$ donc elle converge vers une limite $L \leq \dfrac{1}{e}$.

(d) Comme (u_n) converge vers L, comme $u_{n+1} = g(u_n)$ et que g est continue sur R^+ donc continue en L alors $g(u_n)$ va converger vers $g(L)$

(e) Par unicité de la limite, comme $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_{n+1} = L$ et que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_{n+1} = g(L)$ alors cette limite L va vérifier l'équation $g(x) = x$ donc $L = \dfrac{1}{e}$

13.8.4 Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la suite f_n définie par $\begin{cases} f_n(x) = -x \ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^n & si\ x \in]0;1] \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$
   (a) Etudier la dérivabilité puis la continuité de f_n sur $[0;1]$
   (b) Démontrer que f_n admet un maximum a_n sur $]0;1]$ que l'on calculera.
   (c) On pose $b_n = f_n(a_n)$. Calculer b_n en fonction de n.
2. (a) Démontrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.
   (b) Montrer que $\forall x \in [0; e^{-n}]$ on a $f_n(x) \geq \dfrac{b_n}{a_n}x$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{e^{-n}} f_n(x)dx$
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n \geq J_n$
   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ J_n \geq \dfrac{1}{2}n^n e^{-2n}$
   (c) En déduire que la suite (I_n) est divergente.

13.9 Famille de fonctions paramétrée par un entier naturel

13.9.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{x}$

1. Calculer les limites de f_n aux bornes de son intervalle de définition.
2. Calculer $f_n'(x)$ et déterminer les variations de f_n.
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n admet un minimum. exprimer en fonction de n la valeur y_n de ce minimum et la valeur x_n pour laquelle il est atteint.
4. Etudier le comportement des suites (x_n) et (y_n).

Corrigé

1. (a) Déterminons $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_n(x)$.
   Comme $n < 0$ alors quand $x \mapsto +\infty \quad nx \mapsto +\infty \quad e^{nx} \mapsto +\infty$ on tombe alors sur une forme indéterminée du type "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$".
   Mais $\dfrac{e^{nx}}{x} = \dfrac{e^{nx}}{nx}\,\dfrac{nx}{x}$. Or $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^{nx}}{nx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{nx}{x} = n$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = +\infty$

   (b) Déterminons $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f_n(x)$.
   Quand $x \mapsto 0^+ \quad nx \mapsto 0^+ \quad e^{nx} \mapsto 1 \quad \dfrac{1}{x} \mapsto +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f_n(x) = +\infty$
2. Calculer $f_n'(x)$ et déterminer les variations de f_n.
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n admet un minimum. exprimer en focntion de n la valeur y_n de ce minimum et la valeur x_n pour laquelle il est atteint.
4. Etudier le comportement des suites (x_n) et (y_n).

13.9.2 Edhec 1995

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$

1. Etudier les variations de f_n
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists! u_n \in \mathbb{R} \quad f_n(u_n) = 0$
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq \dfrac{1}{n}$
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_n$ et en déduire que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$
6. Déterminer un équivalent simple de $u_n - \dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$

13.9.3 Escla ISC 1997

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\ x^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique dans $[0; +\infty[$ que l'on notera u_n.
2. En évaluant $f_{n+1}(u_n)$, démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Démontrer que cette suite (u_n) est convergente.
4. (a) Démontrer que $\forall x \neq 1 \quad f_n(x) = x\dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$
   (b) Calculer u_2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n)^n$
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

13.10 Etude de branches infinies

13.10.1 Escla ISC 1997

1. Soit la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{2t}{1+t} - ln(1+t)$$

   (a) Etudier les variations de f.
   (b) Préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f
   (c) Construire $\mathcal{C}_f$ ainsi que sa tangente à l'origine dans un repère orthonormé.
   (d) démontrer que l'équation $f(t) = 0$ a une unique solution notée a dans $]0; +\infty[$.
   (e) Démontrer que $3 < a < 4$.

2. Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{-x} \; ln(1 + e^{2x})$$

   (a) Démontrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Calculer $e^x \; g'(x)$ pour tout réel x.
   (d) Déterminer alors le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.
   (e) Etudier les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g.

13.11 Détermination d'une primitive F d'une fonction f

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2]$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$
2. Justifier la dérivabilité de f sur $]0;+\infty[$ puis déterminer $f'(x)$
3. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + x - 3$
   (a) Etudier les variations de g
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2;3]$.
   Montrer que $2,20 < \alpha < 2,21$
   (c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$
4. Etudier les variations de f
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]0;+\infty[$
6. En déduire le signe de $f(x)$
7. Construire la courbe représentative de f
8. Soit F une primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en $x = 1$
   (a) Sans calculer $F(x)$ déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$
   (b) Soit $u(x) = x\ln(x) - x$. Justifier la dérivabilité de u sur $]0;+\infty[$ puis déterminer $u'(x)$. Conclusion ?
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$ l'on a : $f(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} - 2$
   (d) En déduire l'expression de $F(x)$

13.11.1 Corrigé

13.12 Etudes de fonctions

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on notera α.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{x\ g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
3. Dresser le tableau de variations de f en justifiant.
4. Soit la fonction h_1 définie pour tout réel x par $h_1(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$ et soit $\mathcal{C}_{h_1}$ sa courbe représentative dans le même repère que $\mathcal{C}$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(f(x) - h_1(x))$
   (b) Interpréter graphiquement ce résultat.
   (c) Trouver une fonction h_2 permettant d'avoir une interprétation graphique similaire en $-\infty$.

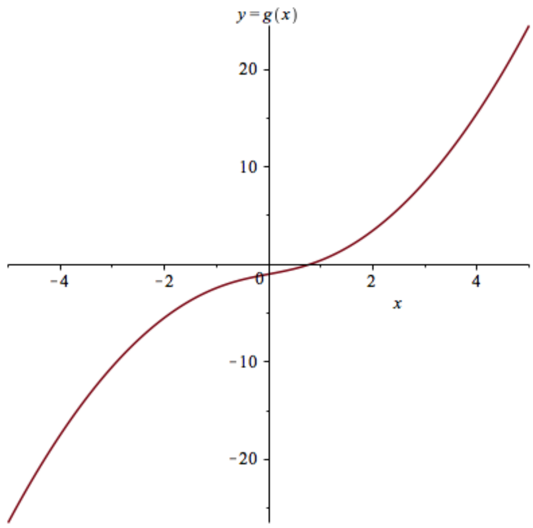
13.12.1 Corrigé

Partie A

Soit $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$. Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+1 \geq 0$ car $x^2 \geq 0$ et donc $x^2+1 \geq 1$ alors $g(x)$ est bien défini sur $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

1.
   - Quand $x \mapsto +\infty$ on a $x^2 \mapsto +\infty$ donc $\sqrt{x^2+1} \mapsto +\infty$ donc $x\sqrt{x^2+1} \mapsto +\infty$ donc $x\sqrt{x^2+1} - 1 \mapsto +\infty$.
     Par conséquent $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty$
   - Quand $x \mapsto -\infty$ on a $x^2 \mapsto +\infty$ donc $\sqrt{x^2+1} \mapsto +\infty$ donc $x\sqrt{x^2+1} \mapsto -\infty$ donc $x\sqrt{x^2+1} - 1 \mapsto -\infty$.
     Par conséquent $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = -\infty$
2.
   - La fonction $x \mapsto x$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction $x \mapsto 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors g est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \sqrt{x^2+1} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$
     On a donc $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ puisque $2x^2+1 > 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$
   - g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   - g est continue sur $\mathbb{R}$
   - Or 0 appartient à l'intervalle image $\mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

   .
3. Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g(x) = 0 \iff x = \alpha$ alors
   - $g(x) < 0$ lorsque $x < \alpha$
   - $g(x) = 0$ lorsque $x = \alpha$
   - $g(x) > 0$ lorsque $x > \alpha$



Partie B

Soit $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}$.

1. Quand $x\mapsto -\infty$ on a $x^2\mapsto +\infty$ donc $\sqrt{x^2+1}\mapsto +\infty$. Or $\dfrac{x^3}{3}\mapsto -\infty$ donc $\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\mapsto -\infty$.

2. Quand $x\mapsto +\infty$ on a $x^2\mapsto +\infty$ donc $\sqrt{x^2+1}\mapsto +\infty$. Or $\dfrac{x^3}{3}\mapsto +\infty$ donc on obtient une forme indéterminée du type " $+\infty-\infty$".
Levons cette indétermination.
$\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2(1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$
$=\dfrac{x^3}{3}-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x^3}{3}-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ en prenant $x>0$
Par conséquent $f(x)=x^3[\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\ ]\mapsto +\infty$ quand $x\mapsto +\infty$ car
Quand $x\mapsto +\infty$ on a $\dfrac{1}{x^2}\mapsto 0$, $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\mapsto 1$ et $[\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\ ]\mapsto \dfrac{1}{3}$

3. La fonction $x\mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et la fonction $x\mapsto \sqrt{x^2+1}$ sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=x^2-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=x^2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x^2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x(x\sqrt{x^2+1}-1)}{\sqrt{x^2+1}}$
Donc $f'(x)=\dfrac{x\ g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ du signe de $x\ g(x)$ car $\sqrt{x^2+1}>0$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$xg(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit $h_1(x)=\dfrac{x^3}{3}-x$

   (a) $f(x)-h_1(x)=\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}-(\dfrac{x^3}{3}-x)=\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^3}{3}+x=x-\sqrt{x^2+1}$.
   Normalement quand $x\mapsto +\infty$ on obtient une forme indéterminée du type "$+\infty-\infty$". levons cette

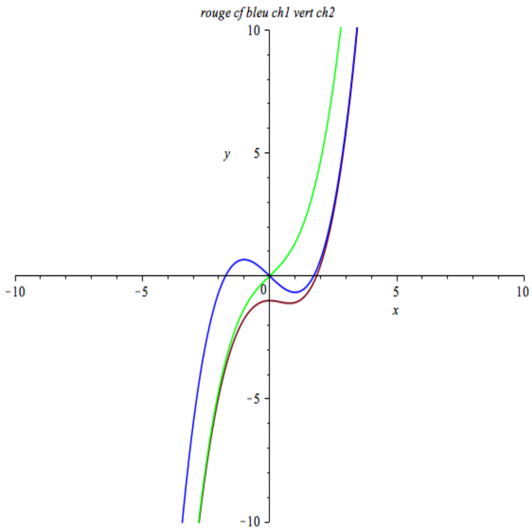
indétermination :
$f(x) - h_1(x) = \dfrac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$
Quand $x \mapsto +\infty$ on a $\sqrt{x^2+1} \mapsto +\infty$ donc $x + \sqrt{x^2+1} \mapsto +\infty$
donc $f(x) - h_1(x) \mapsto 0$.

(b) Par conséquent, au voisinage de $+\infty$ la courbe représentative de f admet pour asymptote la courbe de la fonction h_1.

5. Soit $h_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$

(a) $f(x) - h_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1} - (\dfrac{x^3}{3} + x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^3}{3} - x = -x - \sqrt{x^2+1}$.
Normalement quand $x \mapsto -\infty$ on obtient une forme indéterminée du type "$+\infty - \infty$". levons cette indétermination :
$f(x) - h_2(x) = \dfrac{(-x - \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1})}{-x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2 - (x^2+1)}{-x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{-x + \sqrt{x^2+1}}$
Quand $x \mapsto +\infty$ on a $\sqrt{x^2+1} \mapsto +\infty$ donc $-x + \sqrt{x^2+1} \mapsto +\infty$
donc $f(x) - h_2(x) \mapsto 0$.

(b) Par conséquent, au voisinage de $-\infty$ la courbe représentative de f admet pour asymptote la courbe de la fonction h_2.



13.13 Résolution $x^3 - 3x + 1 = 0$

1. Soit la fonction numérique d'une variable réelle f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$
   (a) Etudier la fonction f.
   (b) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère orthonormé avec comme unité de longueur 5 cm.
      i. Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 ; $\dfrac{1}{2}$; 2
      ii. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie Ω que l'on précisera.
      iii. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre réel m.
   (c) Démontrer l'existence de 3 solutions x_1, x_2, x_3 pour l'équation $f(x) = 0$.
2. Soit g la fonction numérique d'une variable réelle a définie par $g(a) = 2\ cos(a)$
   (a) Exprimer $cos(3a)$ en fonction de $cos(a)$.
   (b) On note $h = f \circ g$.
      i. Démontrer que $h(a) = 2\ cos(3a) + 1$
      ii. Résoudre l'équation $h(a) = 0$ d'inconnue $a \in \mathbb{R}$.
      On précisera tout particulièrement celles des solutions qui appartiennent à $[0\ ;\ \pi]$
      iii. En déduire les valeurs de $cos(a)$ qui correspondent aux solutions a qui appartiennent à $[0\ ;\ \pi]$.
      iv. Donner alors la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de chacune des solutions x_1, x_2, x_3.

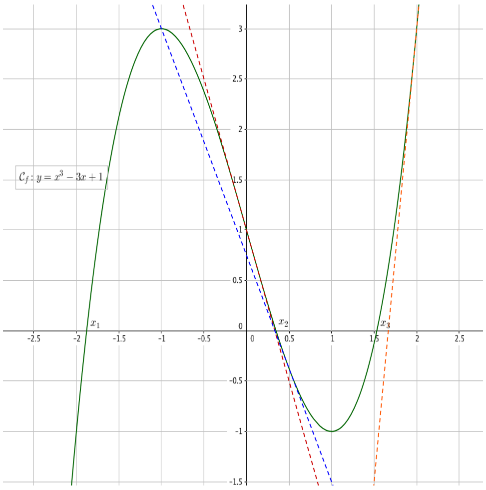
13.13.1 Corrigé

1. Soit la fonction numérique d'une variable réelle f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$
   (a)
   - f est une fonction polynôme de degré 3 donc f est dérivable donc est continue sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$
     Le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $x^2 - 1$ qui a pour racines 1 et 1.
   - D'après le théorème de signe d'un trinôme

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   - $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^3 = -\infty$
     $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^3 = +\infty$
   - $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 = +\infty$
     $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^2 = +\infty$
     Par conséquent, $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

   (b) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère orthonormé avec comme unité de longueur 5 cm.
      i.
      - f est dérivable en 0 donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente d'équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -3x + 1$
      - f est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente d'équation $y = f'(\dfrac{1}{2})(x - \dfrac{1}{2}) + f(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{9}{4})(x - \dfrac{1}{2}) - \dfrac{3}{8} = -\dfrac{9}{4})x + \dfrac{3}{4}$
      - f est dérivable en 2 donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente d'équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 9(x-2) + 3 = 9x - 15$



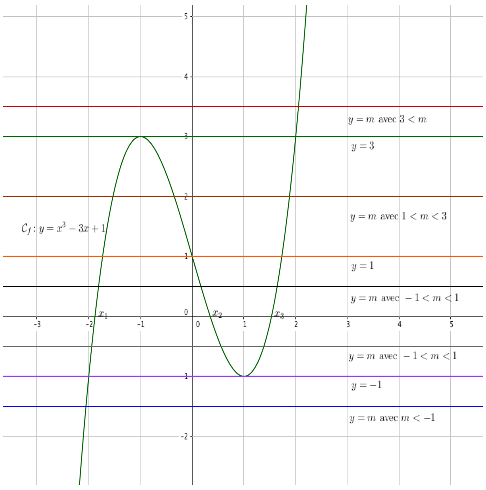
ii. On conjecture d'après le graphique que $\mathcal{C}_f$ admet $\Omega(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ comme centre de symétrie. Démontrons le.

- Le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} X = x - 0 \\ Y = y - 1 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- La courbe de f qui a pour équation $y = x^3 - 3x + 1$ dans $\mathcal{R}$ a pour équation $Y + 1 = X^3 - 3X + 1$ dans $\mathcal{R}'$ c'est-à-dire $Y = X^3 - 3X = -g(X)$
- $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ donc $\forall X \in \mathcal{D}_g \qquad -X \in \mathcal{D}_g$ et $g(-X) = g(X)$
- Par conséquent g est impaire dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donc la courbe de f qui est celle de g admet $\Omega(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ comme centre de symétrie.

iii. Résolvons graphiquement l'équation $f(x) = m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre réel m.

- L'ensemble de définition de l'équation $x^3 - 3x + 1 = m$ est $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$
  $f(x) = m \iff x$ est l'abscisse des points éventuels d'intersection de $\mathcal{C}_f et$ et de la droite D : $y = m$
-

m	Nbre points d'intersection	Nbre solutions	Position solutions
$-\infty < m < -1$	1	1	$x' < 0$
$m = -1$	2	2	$x' < 0$; $x" = 1$
$-1 < m < -1$	3	3	$x' < 0$; $0 < x" < 1$; $1 < x'''$
$m = 1$	3	3	$x' < 0$; $x" = 0$; $1 < x'''$
$1 < m < 3$	3	3	$x' < -1$; $-1 < x" < 0$; $1 < x'''$
$m = 3$	2	2	$x' = -1$; $x" = 2$
$3 < m < +\infty$	1	1	$x' > 2$



(c) i. Comme f est continue sur $\left[-2\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$ car f est continue sur $\mathbb{R}$,

comme $f(-2) < 0$ et $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) > 0$

alors $\exists\ x_1 \in \left]-2\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right[\qquad f(x_1) = 0$

ii. Comme f est continue sur $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ car f est continue sur $\mathbb{R}$,

comme $f(0) > 0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$

alors $\exists\ x_2 \in \left]0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[\qquad f(x_2) = 0$

iii. Comme f est continue sur $\left[\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ car f est continue sur $\mathbb{R}$,

comme $f(\dfrac{3}{2}) < 0$ et $f\ (2) > 0$

alors $\exists\ x_3 \in \left]\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right[\qquad f(x_3) = 0$

2. Soit g la fonction numérique d'une variable réelle a définie par $g(a) = 2\ cos(a)$

(a) $cos(3a) = cos(2a+a) = cos(2a)\ cos(a) - sin(2a)\ sin(a) = (2cos^2(a)-1)cos(a) - 2sin(a)\ cos(a)\ sin(a)$
$cos(3a) = 2\ cos^3(a) - cos(a) - 2\ sin^2(a)\ cos(a) = 2\ cos^3(a) - cos(a) - 2(1 - cos^2(a))\ cos(a)$
$\boxed{cos(3a) = 4\ cos^3(a) - 3\ cos(a)}$

(b) On note $h = f\ \circ\ g$.
Alors $h(a) = (f\ \circ\ g)(a) = f(g(a)) = f(2\ cos(a)) = (2\ cos(a))^3 - 3(2\ cos(a)) + 1$
donc $\boxed{h(a) = 8\ cos^3(a) - 6\ cos(a) + 1 = 2\ cos(3a) + 1}$

i.
$$h(a) = 0 \iff 2\ cos(3a) + 1 = 0 \iff cos(3a) = -\frac{1}{2} \iff cos(3a) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$h(a) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad 3a = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 3a = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$h(a) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad a = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } a = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

ii. Les solutions a qui appartiennent à $[0\ ;\ \pi]$ sont $a = \dfrac{2\pi}{9}$; $a = \dfrac{4\pi}{9}$; $a = \dfrac{8\pi}{9}$ Comme $h(a) = 0 \iff$ $f(g(a)) = 0$ alors $f(x) = 0$ pour $x = g(a)$ avec $a \in \left\{\dfrac{2\pi}{9}\ ;\ \dfrac{4\pi}{9}\ ;\ \dfrac{8\pi}{9}\right\}$

iii. Donc $\boxed{x_1 = 2\ cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) \approx 1,532088886\ ;\ x_2 = 2\ cos\left(\dfrac{4\pi}{9}\right) \approx 0,3472963554}$

$\boxed{x_3 = 2\ cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right) \approx -1,879385242}$

13.14 Fonction trigonométrique

Soit la fonction numérique d'une variable réelle f définie par $f(x) = \dfrac{cos(2x)}{sin(x)}$

1. Etudier puis représenter graphiquement f.
2. Déterminer $g(x)$ de telle sorte que $F(x) = ln\left(\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) - g(x)$ soit une primitive de f sur un intervalle $[\alpha;\beta] \subset [0;\pi]$
3. Démontrer que $tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$
4. Démontrer que $tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$
5. Déterminer, en unité d'aire, l'aire du domaine formé par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{3\pi}{4}$

13.14.1 Corrigé

1.
   - $\mathcal{D}_f = \{x/sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$
   - f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car f est le quotient de $x \mapsto cos(2x)$ et $x \mapsto sin(x)$ telles que
     — $x \mapsto cos(2x)$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$
     — $x \mapsto sin(x)$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$
     — $x \mapsto sin(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathcal{D}_f$
   - f est périodique de période 2π puisque $x \mapsto cos(2x)$ est périodique de période π et $x \mapsto sin(x)$ est périodique de période 2π
   - f est impaire car
     — $\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad -x \in \mathcal{D}_f$
     — $\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad f(-x) = \dfrac{cos(-2x)}{sin(-x)} = \dfrac{cos(2x)}{-sin(x)} = -f(x)$
   - On peut étudier donc f sur l'intervalle $]0;\pi[$, on complétera ensuite sur $]-\pi;0[$ par la symétrie centrale de centre O et enfin on reproduira périodiquement sur les intervalles de longueur 2π
   - $\forall x \in]0;\pi[\qquad f'(x) = \dfrac{-2sin(2x)sin(x) - cos(2x)cos(x)}{sin^2(x)} = \dfrac{-4sin^2(x)cos(x) - cos(2x)cos(x)}{sin^2(x)}$
     $f'(x) = \dfrac{-cos(x)[4sin^2(x) + cos(2x)]}{sin^2(x)} = \dfrac{-cos(x)[4sin^2(x) + 1 - 2sin^2(x)]}{sin^2(x)} = \dfrac{-cos(x)[2sin^2(x) + 1]}{sin^2(x)}$
     du signe de $cos(x)$.
   -

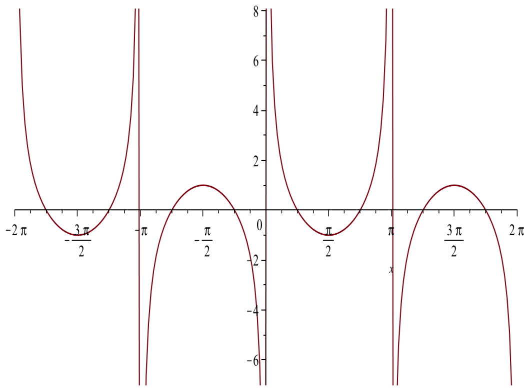
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-cos(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   - car
     — $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} cos(2x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} sin(x) = 0^+$
     — $\lim\limits_{x \mapsto \pi^-} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto \pi^-} cos(2x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto \pi^-} sin(x) = 0^+$
   - $\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad f(x) = 0 \iff cos(2x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$
     Par conséquent, sur l'intervalle $]0;\pi[\qquad f(x) = 0$ pour $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{3\pi}{4}$

> $f := x \to \frac{\cos(2 \cdot x)}{\sin(x)};$

$$f := x \mapsto \frac{\cos(2\,x)}{\sin(x)}$$ (2

> $plot(f(x), x);$



2. • Lorsque $x \in]0;\pi[$ alors $\frac{x}{2} \in]0;\frac{\pi}{2}[$ donc $tan\left(\frac{x}{2}\right)$ existe et ne s'annule pas.
   • Si $F(x) = ln\left(\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) - g(x)$ est une primitive de f alors
   $f(x) = F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - g'(x)$ avec $u(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ donc $u'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
   • $\frac{cos(2x)}{sin(x)} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{tan\left(\frac{x}{2}\right)} - g'(x)$ d'où $g'(x) = \frac{\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2\ tan\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{cos(2x)}{sin(x)}$
   $g'(x) = \frac{1}{2\ cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}} - \frac{cos(2x)}{sin(x)}$
   $g'(x) = \frac{1}{2\ sin\left(\frac{x}{2}\right)\ cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{cos(2x)}{sin(x)}$
   $g'(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{cos(2x)}{sin(x)} = \frac{1-cos(2x)}{sin(x)} = \frac{1-(1-2sin^2(x))}{sin(x)} = \frac{2sin^2(x)}{sin(x)} = 2sin(x)$
   Par conséquent, $\boxed{g(x) = -2cos(x) + C}$
   • Soit $\boxed{F(x) = ln\left(\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + 2cos(x)}$.
   On vérifie que $F'(x) = \frac{1}{sin(x)} - 2sin(x) = \frac{1-2sin^2(x)}{sin(x)} = \frac{cos(2x)}{sin(x)} = f(x)$. CQFD.
3. • On sait que $tan(2\theta) = \frac{2\ tan(\theta)}{1-tan^2(\theta)}$
   • Or $-1 = tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = tan\left(2\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2\ tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{1-tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$ d'où $tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 = 2\ tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
   On en déduit que $tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 2\ tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 = 0$
   • Résolvons l'équation $X^2 - 2X - 1 = 0$. on a $\Delta = 4 + 4 = 8$
   donc il y a deux racines $X' = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $X" = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$.
   • Or $tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0$ donc $\boxed{tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}}$

4. • On sait que $tan(2\theta) = \dfrac{2\ tan(\theta)}{1 - tan^2(\theta)}$

   • Or $1 = tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = tan\left(2\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2\ tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}{1 - tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}$ d'où $1 - tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\ tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

   On en déduit que $-tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 2\ tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + 1 = 0$

   • Résolvons l'équation $-X^2 - 2X + 1 = 0$. on a $\Delta = 4 + 4 = 8$
   donc il y a deux racines $X' = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$ et $X" = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$.

   • Or $tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\boxed{tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1}$

5. • Comme f est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$ alors f y est intégrable donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(t)\ dt$ existe.

   • Comme le domaine Δ considéré est situé en dessous de l'axe des abscisses alors :
   $Aire(\Delta) = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(t)\ dt$ unité d'aire

   • Or $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(t)\ dt = [\,]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$
   donc $I = ln\left(\left|tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)\right|\right) + 2cos(\dfrac{3\pi}{4}) - ln\left(\left|tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right|\right) + 2cos(\dfrac{\pi}{4}) = ln(\sqrt{2}+1) - ln(\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2}$

   • Par conséquent, $\boxed{Aire(\Delta) = 2\sqrt{2} - ln(\sqrt{2}+1) + ln(\sqrt{2}-1) \text{ unité d'aire}}$
   $\boxed{Aire(\Delta) \approx 1,065 \text{ unité d'aire}}$

13.15 Etude de fonction

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x tels que $e^x - e^{-x} > 0$
2. On définit la fonction f par $\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = ln(e^x - e^{-x})$
   (a) Etudier les variations de f.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$
3. (a) En déduire l'existence d'un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$
   (b) Déterminer la valeur exacte de α.
   (c) Vérifier que $f'(\alpha) = \sqrt{5}$
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - x$
   (b) En déduire une équation cartésienne d'asymptote (Δ) à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
   (c) etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ)
5. Etudier la concavité de f.
6. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ en faisant figurer (Δ).
   On admetra que $\alpha \approx 0,5$ et que $\sqrt{5} \approx 2,23$

13.16 Etude de fonction

1. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x - 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec comme unité graphique 1 cm.

(a) Calculer $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x)$.

(b) i. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$

ii. En déduire $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)$.

(c) Calculer $f'(x)$ et établir le tableau des variations de f.

(d) i. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ lorsque $x \mapsto -\infty$

ii. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D)

(e) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (D') à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -1.

(f) Construire alors $\mathcal{C}_f$ et (D).

2. (a) Montrer qu'en tout point Md'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}_f$, il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ dont on établira une équation cartésienne en fonction de a.

(b) Cette tangente rencontre l'asymptote (D) en un point N.
On désigne par M' et N' les projections orthogonales des points M et N sur l'axe des abscisses.

i. Démontrer que $\overline{M'N'}$ est un nombre constant.

ii. En déduire une construction simple de la tangent en M.

iii. Construire la tangente (D') à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -1.

13.17 Etude de fonction paramétrée

Les parties 2 et 3 peuvent être traitées indépendamment de la partie 1.

Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$.
On considère la fonction numérique f_a de la variable réelle x définie par

$$f_a(x) = (x^2 + ax - a)e^{-x}$$

Soit $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de la fonction f_a dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Etudier selon les valeurs de a les variations de la fonction f_a et donner les différents tableaux de variations possibles pour f_a.
2. On suppose que $a \neq -2$.
   Démontrer que l'ensemble des points du plan en lesquels la tangente à $\mathcal{C}_a$ est parallèle à l'axe des abscisses, est la réunion d'une partie de droite E_1 et d'une partie de courbe E_2 dont on précisera une équation cartésienne de la forme $y = g(x)$.
3. (a) Etudier la fonction numérique g de la variable réelle x définie par

   $$g(x) = x\ e^{-x}$$

   (b) Tracer E_2 dans le plan rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie 2

On pose $a = 1$.

1. Donner le tableau de variation de la fonction f_1.
2. Etudier la position de $\mathcal{C}_1$ par rapport à E_2.
3. Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec les axes de coordonnées. Tracer $\mathcal{C}_1$.
4. (a) Déterminer les réels α et β tels que

   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \alpha f"_1(x) + \beta f_1'(x) + 2\ e^{-x}$$

   (b) En déduire une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
5. Soit t un réel supérieur à 1.
   (a) Déterminer, en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(t)$ de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\begin{cases} 1 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$.
   (b) Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathcal{A}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   (c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Partie 3

On pose $a = -2$.

1. Etudier la fonction numérique h de la variable réelle x définie par

   $$h(x) = f_{-2}(x) - x$$

2. (a) Démontrer que l'équation $f_{-2}(x) = x$ admet une solution unique que l'on notera x_0.
   (b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de x_0.
3. (a) Démontrer que f_{-2} est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$
   (b) Donner le tableau de variation de la fonction réciproque f_{-2}^{-1}
4. Tracer la courbe représentative des fonctions f_{-2} et f_{-2}^{-1} dans le plan rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

13.17.1 Corrigé

Partie 1
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $f_a(x) = (x^2 + ax - a)e^{-x}$.
   - $x \mapsto x^2 + ax - a$ est une fonction polynôme donc est définie sur $\mathbb{R}$.
     De même, $x \mapsto e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
     f_a étant le produit des deux fonctions est donc définie sur $\mathbb{R}$.
   - f_a étant ni paire, ni impaire est donc étudiée sur $\mathbb{R}$.
   - $x \mapsto x^2 + ax - a$ est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
     De même, $x \mapsto e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
     f_a étant le produit des deux fonctions est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a'(x) = (2x+a)e^{-x} - (x^2 + ax - a)e^{-x} = e^{-x}[-x^2 + x(2-a) + 2a]$
   - $f_a'(x) = 0 \iff e^{-x}[-x^2 + x(2-a) + 2a] = 0 \iff -x^2 + x(2-a) + 2a = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$
   - Le discriminant du trinôme $P(x) = -x^2 + x(2-a) + 2a$ est :
     $\Delta = (2-a)^2 - 4(-1)(2a) = 4 - 4a + a^2 + 8a = 4 + 4a + a^2 = (a+2)^2$
   - ou bien $a = -2$
     — $\Delta = 0$ donc le trinôme $f_{-2}'(x) = -x^2 + 4x + 4 < 0$ sauf en $x = \dfrac{-4}{2(-1)} = 2$ où le trinôme s'annule.
     — $f_{-2}(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$ donc $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_{-2}(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 - 2x + 2 = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^{-x} = +\infty$
     — $f_{-2}(x) = \dfrac{x^2}{e^x}\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_{-2}(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_{-2}'(x)$		$-$	0	$-$	
$f_{-2}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{2}{e^2}$	$\searrow$	0

   - ou bien $a \neq -2$
     — $\Delta > 0$ donc le trinôme $P(x)$ a deux racines x' et x'' avec $x' < x''$.
     — $f_a(x) = (x^2 + ax - a)e^{-x}$ donc $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_a(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 + ax - a = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^{-x} = +\infty$
     — $f_a(x) = \dfrac{x^2}{e^x}\left(1 + \dfrac{a}{x} - \dfrac{a}{x^2}\right)$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_a(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 1 + \dfrac{a}{x} - \dfrac{a}{x^2} = 1$
     —

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_a(x')$	$\nearrow$	$f_a(x'')$	$\searrow$	0

2. On suppose que $a \neq -2$.
   La tangente à $\mathcal{C}_a$ en $M(x,y)$ est parallèle à l'axe des abscisses $\left\{\begin{array}{l} y = f_a(x) \\ f_a'(x) = 0 \end{array}\right.$

$f_a'(x) = 0 \iff e^{-x}[-x^2 + x(2-a) + 2a] = 0 \iff -x^2 + x(2-a) + 2a = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$
$\iff x = x'$ ou $x = x''$
$\iff x = \dfrac{a - 2 - |2+a|}{-2}$ ou $x = \dfrac{a - 2 + |2+a|}{-2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2+a$		$-$	0	$+$	
$\lvert 2+a \rvert$		$-2-a$	0	$2+a$	

   - ou bien $a < -2$ alors
     $x = \dfrac{a - 2 - |2+a|}{-2} = \dfrac{a - 2 - (-2-a)}{-2} = -a$ ou $x = \dfrac{a - 2 + |2+a|}{-2} = \dfrac{a - 2 + (-2-a)}{-2} = 2$

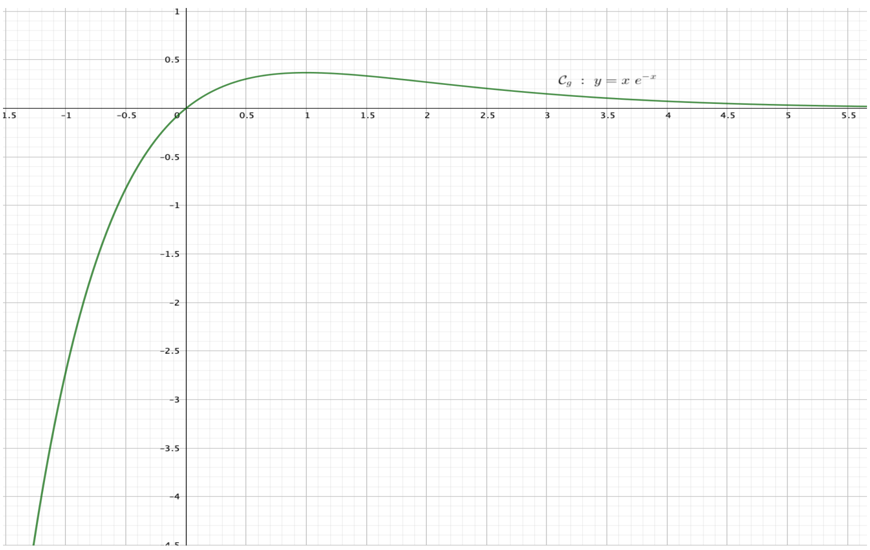
- ou bien $a > -2$ alors
$x = \dfrac{a-2-|2+a|}{-2} = \dfrac{a-2-(2+a}{-2} = 2$ ou $x = \dfrac{a-2+|2+a|}{-2} = \dfrac{a-2+(2+a)}{-2} = -a$
- Par conséquent, si $a \neq -2$ on a $f_a'(x) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -a$

On en déduit que :
La tangente à $\mathcal{C}_a$ en $M(x,y)$ est parallèle à l'axe des abscisses
$\iff M\begin{pmatrix} 2 \\ (4+a)e^{-2} \end{pmatrix}$ ou $M\begin{pmatrix} -a \\ -a\ e^{-a} \end{pmatrix}$
L'ensemble recherché est la réunion d'une partie de la droite E_1 d'équation $x = 2$ et d'une partie de la courbe E_2 d'équation $y = -x\ e^{-x}$.

3. (a) Soit $g(x) = x\ e^{-x}$
   - L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$ car g est le produit de $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ qui sont toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.
   - g n'est ni paire, ni impaire donc on l'étudie sur $\mathbb{R}$.
   - g est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ car g est le produit de $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 1\ e^{-x} - x\ e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ du signe du binôme $1-x$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$.
   - $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^{-x} = +\infty$.
   Etudions cette branche infinie :
   $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc la courbe E_2 admet donc au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
   - $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
   La courbe E_2 admet donc au voisinage de $+\infty$ une aymptote qui est l'axe des abscisses.
   -

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(b) Voici ci dessous la courbe représentative E_2



Partie 2

On pose $a = 1$. Soit $f_1(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1. D'après la partie 1 on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_1(-1) = -e$	$\nearrow$	$f_1(2) = \dfrac{5}{e^2}$	$\searrow$	0

2. • $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) - g(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x} - x\ e^{-x} = e^{-x}(x^2 + x - 1 - x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ du signe de $x^2 - 1$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$.
   • ou bien $x < -1$ ou $x > 1$ alors $f_1(x) - g(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de E_2.
   • ou bien $-1 < x < 1$ alors $f_1(x) - g(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_1$ est en-dessous de E_2.
   • ou bien $x = -1$ ou $x = 1$ alors $f_1(x) - g(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_1$ rencontre E_2

3. • $f_1(0) = (0^2 + 0 - 1)e^{-0} = -1$ donc $\mathcal{C}_1 \cap (Oy) = \left\{ A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
   • $f_1(x) = 0 \iff (x^2 + x - 1)e^{-x} = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} \neq 0$
   Le discriminant du trinôme $x^2 + x - 1$ est $\Delta = 1^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5$
   Les solutions de $x^2 + x - 1 = 0$ sont $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Par conséquent, $\mathcal{C}_1 \cap (Ox) = \left\{ D \begin{pmatrix} \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} ; C \begin{pmatrix} \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4. (a) Déterminer les réels α et β tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \alpha f"_1(x) + \beta f_1'(x) + 2\ e^{-x}$$

   (b) En déduire une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$

5. Soit t un réel supérieur à 1.
   (a) Déterminer, en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(t)$ de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\begin{cases} 1 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$.
   (b) Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathcal{A}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   (c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

13.18 Hyperbole

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct du plan.
Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = -2x + \sqrt{3(x^2 - 1)}$$

1. (a) Etudier les variations de f
   (b) Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à $\mathcal{R}$.
      i. Démontrer que la droite $(D_1) : y = (-2 + \sqrt{3})x$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
      ii. Démontrer que la droite $(D_2) : y = (-2 - \sqrt{3})x$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
   (c) Précisez les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisse -1 et 1.
   (d) Construisez alors $\mathcal{C}_f$.
2. Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$g(x) = -2x - \sqrt{3(x^2 - 1)}$$

   (a) Démontrer que sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie centrale de centre O.
   (b) Démontrer que la courbe $\Gamma = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g$ a pour équation

$$x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$$

   (c) Construisez alors Γ.

13.19 Bac D Rennes Septembre 1976

Soit la fonction numérique d'une variable réelle f définie par

$$f(x) = \frac{4}{3}x + 2 + ln\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)$$

Partie A

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Justifier la dérivabilité de f puis déterminer la fonction dérivée f' de f.
4. En déduire le tableau de variations de f.

Partie B
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. On prendra comme unité de longueur 2 cm.

1. Démontrer que la droite D d'équation $y = \frac{4}{3}x + 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
2. Démontrer que I le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = 0$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
3. Construire la tangente à $\mathcal{C}_f$ en I.
4. Construire ensuite $\mathcal{C}_f$.

Partie C
Soit un réel $a > 2$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(a) = \int_3^a ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\ dx$
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (D) et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 4$. Donner une valeur approchée de cette aire.

Partie D
On appelle ϕ la restriction de f à $]2\ ;\ +\infty[$.

1. Démontrer que ϕ admet une fonction réciproque ψ.
2. Donner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de ψ.
3. Construire sur un graphique distinct de celui de la partie B, les courbes représentatives $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}')$de ϕ et de ψ

Partie E
Soit un point mobile M ayant pour coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}t \\ y = t + 2 + ln\left(\frac{8-3t}{8+3t}\right) \end{cases}$$

où $t \in \left]-\frac{8}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right[$

1. Démontrer que la trajectoire de M est une partie de $\mathcal{C}_f$ que l'on précisera.
2. Calculer , en fonction de t , les coordonnées du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et du vecteur-accélaration $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ du point M à la date t.
3. Etudier le mouvement de M.

NB - On donne $ln(2) \approx 0,69$; $\ln(3) \approx 1,10$; $ln(5) \approx 1,61$; $ln(7) \approx 1,95$

THAT'S ALL FOLKS ! ! !

13.20 Etude de fonctions

Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = x + \dfrac{1 - e^x}{1 + e^{-x}}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
3. $f(x) = \begin{cases} x[ln(|x|)]^2 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$
5. $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x - 1}{x}\right|}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + ln(|x + 1|)$