Livret de Trigonométrie

Christian Jean CYRILLE

25 février 2025

"Il s'agit , non seulement d'avoir des idées sur les suites, mais d'avoir de la suite dans les idées"
Anonyme

Table des matières

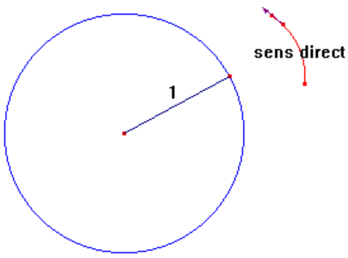
Chapitre 1

Maîtriser le cercle trigonométrique

1.1 Lemme

Soit un cercle de centre O et de rayon R.
On admet qu'un arc de ce cercle d'angle α a pour longueur $R\ \alpha$.
Donc le périmètre d'un cercle de rayon R est $P = 2\pi\ R$.

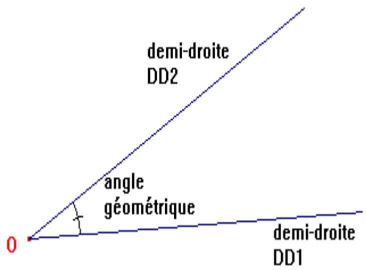
1.2 Cercle trigonométrique



1. On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1.
2. Le périmètre d'un cercle trigonométrique mesure donc 2π
3. Un tour de cercle trigonométrique mesure 2π radians.
4. Un demi-tour de cercle trigonométrique mesure π radians.
5. Un quart de tour de cercle trigonométrique mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radians.

Le sens de parcours direct ou positif sur ce cercle trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
L'autre sens est dit indirect ou rétrograde.

1.3 De l'angle géométrique à l'angle orienté

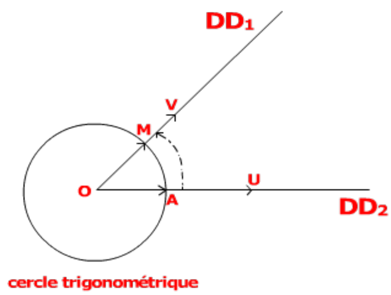


Comment passe-t-on d'un angle géométrique de demi-droites à un angle orienté de demi-droites ?
A partir de deux demi-droites de même origine O, on peut créer un angle géométrique de demi-droites.
Dorénavant, nous orienterons un angle de demi-droites :

- de façon positive ou directe si on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- de façon négative ou indirecte ou rétrograde sinon.

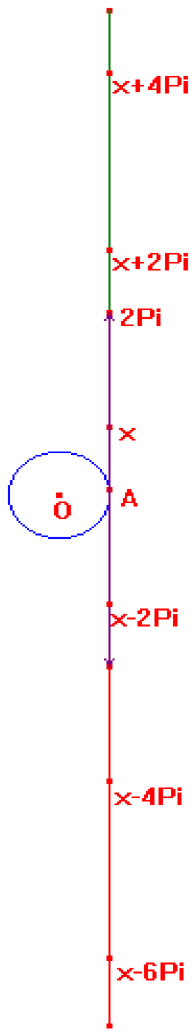
1.4 3 notions équivalentes

L'angle orienté des demi-droites $[DD_1)$ et $[DD_2)$ est l'angle orienté des vecteurs non nuls $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$.
C'est aussi l'angle orienté des vecteurs unitaires(c'est-à-dire de norme 1) : vecteur $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{\|OU\|}\overrightarrow{OU}$ et vecteur $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\|OV\|}\overrightarrow{OV}$.
On écrira $(DD_1, DD_2) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$



1.5 Mesures d'un angle orienté de vecteurs

Voici le cercle trigonométrique et un fil représentant l'axe des réels :
Colorions ce fil avec 2 couleurs : l'une pour $\mathbb{R}^+$ et l'autre pour $\mathbb{R}^-$.



Posons le zéro du fil en A et enroulons ce fil qui représente $\mathbb{R}$ autour du cercle trigonométrique :

- les réels positifs dans le sens direct
- les réels négatifs dans l'autre sens

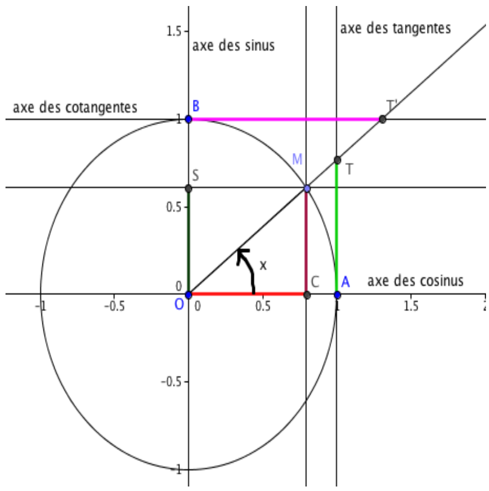
Alors

- en A vont se poser les points du fil correspondants aux réels :$\cdots, -4\,\pi; -2\,\pi; 0; 2\,\pi; 4\,\pi; \cdots$
- en M vont se poser les les points du fil correspondants aux réels : $\cdots,, x-4\,\pi; x-2\,\pi; x; x+2\,\pi; x+4\,\pi; \cdots$

Chapitre 2

Rapports trigonométriques

2.1 Définition



Si l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ mesure x, si C est le projeté orthogonal de M sur la droite (OA) et si S est le projeté orthogonal de M sur la droite (OB) alors

$$\begin{cases} cosinus(x) = cos(x) = \overline{OC} \\ sinus(x) = sin(x) = \overline{OS} \\ tangente(x) = tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)} = \overline{AT} \\ cotangente(x) = cotan(x) = \dfrac{1}{tan(x)} = \dfrac{cos(x)}{sin(x)} = \overline{BT'} \end{cases}$$

2.2 Propriétés

2.2.1 Conditions d'existence

♡ ♡ ♡

1. $sin(x)$ existe pour tout réel x donc $D_{sin} = \mathbb{R}$.
2. $cos(x)$ existe pour tout réel x donc $D_{cos} = \mathbb{R}$.
3. $tan(x)$ existe pour tout réel $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc
   $D_{tan} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. $cotan(x)$ existe pour tout réel $x \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
   donc $D_{cotan} = \mathbb{R} - \{k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2.2.2 Formule Fondamentale de la Trigonométrie

♡ ♡ ♡ 3 formes équivalentes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \\ sin^2(x) = 1 - cos^2(x) \\ cos^2(x) = 1 - sin^2(x) \end{cases}$$

2.2.3 Valeurs prises par les fonctions circulaires

♡ ♡ ♡

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq sin(x) \leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq cos(x) \leq 1 \\ \forall x \in D_{tan} \quad -\infty < tan(x) < +\infty \\ \forall x \in D_{cotan} \quad -\infty < cotan(x) < +\infty \end{cases}$$

2.2.4 Périodicité

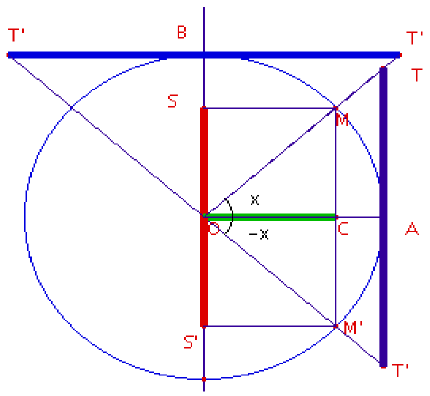
♡ ♡ ♡

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad sin(x + 2\ k\pi) = sin(x)$ donc sin est périodique de période $T = 2\pi$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad cos(x + 2\ k\pi) = cos(x)$ donc cos est périodique de période $T = 2\pi$
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\right\} \quad tan(x + k\pi) = tan(x)$ donc tan est périodique de période $T = \pi$
4. $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\} \quad cotan(x + k\pi) = cotan(x)$
   donc $cotan$ est périodique de période $T = \pi$

Exemples

1. Si $a \neq 0$ alors $x \mapsto sin(ax + b)$ et $x \mapsto cos(ax + b)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{a}$.
2. Si $a \neq 0$ alors $x \mapsto tan(ax + b)$ et $x \mapsto cotan(ax + b)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{\pi}{a}$

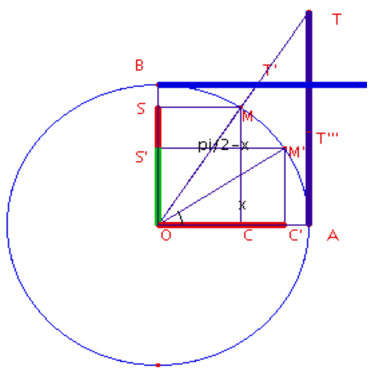
2.2.5 Angles opposés de mesures x et $-x$



♡ ♡ ♡

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $sin(-x) = -sin(x)$ donc sin est impaire.
   Par conséquent, C_{sin} admet O comme centre de symétrie.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $cos(-x) = cos(x)$ donc cos est paire.
   Par conséquent, C_{cos} admet l'axe des ordonnées (Oy) comme axe de symétrie.
3. $\forall x \in D_{tan}$ l'on a : $-x \in D_{tan}$ et $tan(-x) = -tan(x)$ donc tan est impaire.
   Par conséquent, C_{tan} admet O comme centre de symétrie.
4. $\forall x \in D_{cotan}$ l'on a : $-x \in D_{cotan}$ et $cotan(-x) = -cotan(x)$ donc $cotan$ est impaire.
   Par conséquent, C_{cotan} admet O comme centre de symétrie.

2.2.6 Angles complémentaires de mesures x et $\dfrac{\pi}{2} - x$

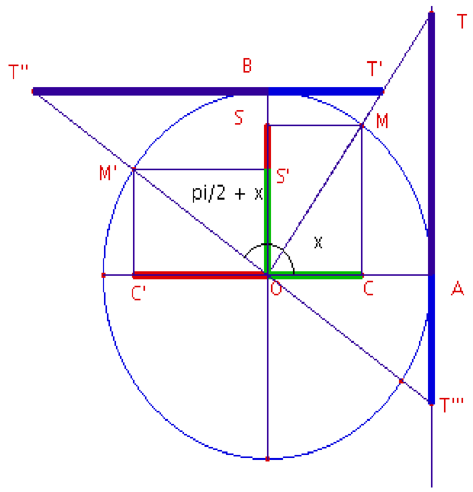


♡ ♡ ♡

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x) \\ \forall x \in \mathbb{R} & cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x) \\ \forall x \in D_{tan} & tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cotan(x) \\ \forall x \in D_{cotan} & cotan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tan(x) \end{cases}$$

Les angles de mesure x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont dits complémentaires.
Des angles complémentaires échangent donc leurs sinus et cosinus, leurs tangente et leur cotangente.

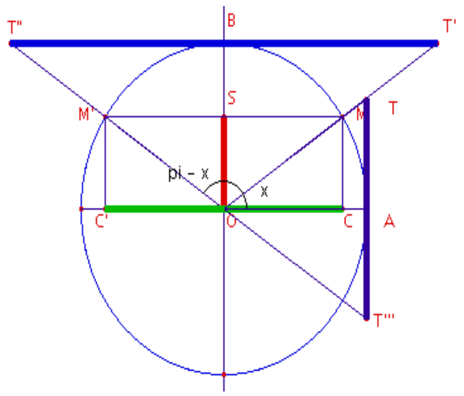
2.2.7 Angles de mesures x et $\frac{\pi}{2} + x$



♡ ♡ ♡

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x) \\ \forall x \in \mathbb{R} & cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)) = -sin(x) \\ \forall x \in D_{tan} & tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -cotan(x) \\ \forall x \in D_{cotan} & cotan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -tan(x) \end{cases}$$

2.2.8 Angles supplémentaires de mesures x et $\pi - x$

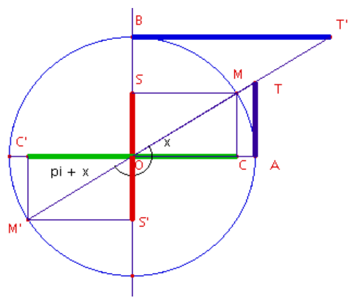


♡ ♡ ♡

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & sin(\pi - x) = sin(x) \\ \forall x \in \mathbb{R} & cos(\pi - x) = -cos(x) \\ \forall x \in D_{tan} & tan(\pi - x) = -tan(x) \\ \forall x \in D_{cotan} & cotan(\pi - x) = -cotan(x) \end{cases}$$

Les angles de mesure x et $\pi - x$ sont dits supplémentaires.

2.2.9 Angles de mesures x et $\pi + x$



♡ ♡ ♡

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & sin(\pi + x) = -sin(x) \\ \forall x \in \mathbb{R} & cos(\pi + x) = -cos(x) \\ \forall x \in D_{tan} & tan(\pi + x) = tan(x) \\ \forall x \in D_{cotan} & cotan(\pi + x) = cotan(x) \end{cases}$$

2.3 Multiplication des arcs

2.3.1 Formules

♡ ♡ ♡

Si $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) \\ cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) \\ sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a) \\ sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a) \end{cases}$$

Si $a \in D_{tan}, \quad b \in D_{tan}, \quad a+b \in D_{tan} \qquad tan(a+b) = \dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$

Si $a \in D_{tan}, \quad b \in D_{tan}, \quad a-b \in D_{tan} \qquad tan(a-b) = \dfrac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$

Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a) \\ sin(2a) = 2\ sin(a)cos(a) \\ \\ cos^2(a) = \dfrac{1+cos(2a)}{2} \ ;\ sin^2(a) = \dfrac{1-cos(2a)}{2} \\ \\ cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1+cos(a)}{2} \ ;\ sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1-cos(a)}{2} \\ \\ cos^2\left(\dfrac{a}{4}\right) = \dfrac{1+cos\left(\dfrac{a}{2}\right)}{2} \ ;\ sin^2\left(\dfrac{a}{4}\right) = \dfrac{1-cos\left(\dfrac{a}{2}\right)}{2} \end{cases}$$

2.3.2 Exercices

1. Démontrer que $tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}$
2. Démontrer que $tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$

1. • On sait que $tan(2\theta) = \dfrac{2\ tan(\theta)}{1-tan^2(\theta)}$

   • Or $-1 = tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = tan\left(2\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{2\ tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)}{1-tan^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)}$ d'où $tan^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) -$
   $1 = 2\ tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

On en déduit que $tan^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) - 2\ tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) - 1 = 0$

- Résolvons l'équation $X^2 - 2X - 1 = 0$. on a $\Delta = 4 + 4 = 8$
  donc il y a deux racines $X' = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $X" = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$.
- Or $tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) > 0$ donc $\boxed{tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}}$

2. - On sait que $tan(2\theta) = \dfrac{2\ tan(\theta)}{1 - tan^2(\theta)}$
   - Or $1 = tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = tan\left(2\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2\ tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}{1 - tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}$ d'où $1 - tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\ tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
     On en déduit que $-tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 2\ tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + 1 = 0$
   - Résolvons l'équation $-X^2 - 2X + 1 = 0$. on a $\Delta = 4 + 4 = 8$
     deux racines $X' = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1+\sqrt{2}$ et $X" = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -1-\sqrt{2}$.
   - Or $tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\boxed{tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1}$

2.4 Transformations de sommes en produits

2.4.1 Formules

1. $cos(a)cos(b) = \dfrac{cos(a-b)+cos(a+b)}{2}$

   $sin(a)sin(b) = \dfrac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}$

   $sin(a)cos(b) = \dfrac{sin(a+b)+sin(a-b)}{2}$

   En posant $\left\{\begin{array}{l} a+b=p \\ a-b=q \end{array}\right.$ on a alors $\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{p+q}{2} \\ b=\dfrac{p-q}{2} \end{array}\right.$ d'où :

   $$\left\{\begin{array}{l} cos(p)+cos(q) = 2\ cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ cos(p)-cos(q) = -2\ sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right) sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ sin(p)+sin(q) = 2\ sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right) cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \end{array}\right.$$

   puis $sin(p)-sin(q) = 2\ sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ (en changeant q en $-q$)

2. On peut alors calculer $cos(p)+sin(q)$ de 2 façons :
   - $cos(p)+sin(q) = cos(p) + cos\left(\dfrac{\pi}{2}-q\right) = \cdots$
   - $cos(p)+sin(q) = sin\left(\dfrac{\pi}{2}-p\right) + sin(q) = \cdots$

3. $\forall p, q \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
   - $tan(p)+tan(q) = \dfrac{sin(p)}{cos(p)} + \dfrac{sin(q)}{cos(q)} = \dfrac{sin(p)cos(q)+sin(q)cos(p)}{cos(p)cos(q)}$

     $tan(p)+tan(q) = \dfrac{sin(p+q)}{sin(p)sin(q)}$
   - $tan(p)-tan(q) = \dfrac{-}{sin(p-q)}cos(p)cos(q)$ en changeant q en $-q$

4. $\forall p, q \in \mathbb{R} - \{+k\pi\}$
   - $cotan(p)+cotan(q) = \dfrac{sin(p+q)}{cos(p)cos(q)}$
   - $cotan(p)-cotan(q) = \dfrac{sin(p-q)}{sin(p)sin(q)}$ en changeant p en $\dfrac{\pi}{2}-p$ et q en $\dfrac{\pi}{2}-q$

2.4.2 Exercices

Ex 1

> Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $cos(a) + cos(3a) + cos(5a) \neq 0$.
> Simplifier l'expression $F = \dfrac{sin(a) + sin(3a) + sin(5a)}{cos(a) + cos(3a) + cos(5a)}$

$F = \dfrac{sin(a) + sin(5a) + sin(3a)}{cos(a) + cos(5a) + cos(3a)}$

$F = \dfrac{2sin\left(\dfrac{a+5a}{2}\right)cos\left(\dfrac{a-5a}{2}\right) + sin(3a)}{2cos\left(\dfrac{a+5a}{2}\right)cos\left(\dfrac{a-5a}{2}\right) + cos(3a)} = \dfrac{2sin(3a)cos(-2a) + sin(3a)}{2cos(3a)cos(-2a) + cos(3a)}$

$F = \dfrac{sin(3a)[2cos(2a) + 1]]}{cos(3a)[2cos(2a) + 1)}$

Donc

$$\boxed{F = tan(3a)}$$

Ex 2

résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) : \qquad sin(2x) + sin(4x) + sin(6x) + sin(8x) = 0$$

1. L'ensemble de définition de cette équation est : $\mathbb{R}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad (E) \iff sin(2x) + sin(8x) + sin(4x) + sin(6x) = 0$
$\iff 2sin\left(\frac{10x}{2}\right)\ cos\left(\frac{-6x}{2}\right) + 2sin\left(\frac{10x}{2}\right)\ cos\left(\frac{-2x}{2}\right) = 0$
$\iff 2[sin(5x)cos(-3x) + sin(5x)cos(-x) = 0$
$\iff sin(5x)[cos(3x) + cos(x)] = 0$
$\iff sin(5x)\ 2\ cos\left(\frac{4x}{2}\right) cos\left(\frac{2x}{2}\right) = 0$
$\iff 2sin(5x)cos(2x)cos(x) = 0 \iff sin(5x)cos(2x)cos(x) = 0$
$\iff sin(5x) = 0$ ou $cos(2x) = 0$ ou $cos(x) = 0$
$\iff \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad 5x = k_1\pi$ ou $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$
ou $\exists k_3 \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k_3\pi$
$\iff \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x = k_1\frac{\pi}{5}$ ou $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} + k_2\frac{\pi}{2}$
ou $\exists k_3 \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k_3\pi$
3. Par conséquent, l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{k\frac{\pi}{5}\ ;\ F\pi 4 + k\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2} + k_3\pi \text{ tels que } k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

2.5 3 équations trigonométriques fondamentales

♡ ♡ ♡

1. $cos(x) = cos(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = x_0 + 2k\pi \ ou\ x = -x_0 + 2k\pi$
2. $sin(x) = sin(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = x_0 + 2k\pi \ ou\ x = \pi - x_0 + 2k\pi$
3. $tan(x) = tan(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = x_0 + k\pi$

2.5.1 Exemples

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

1. $cos(x) = 0$
2. $sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $tan(x) = \sqrt{3}$

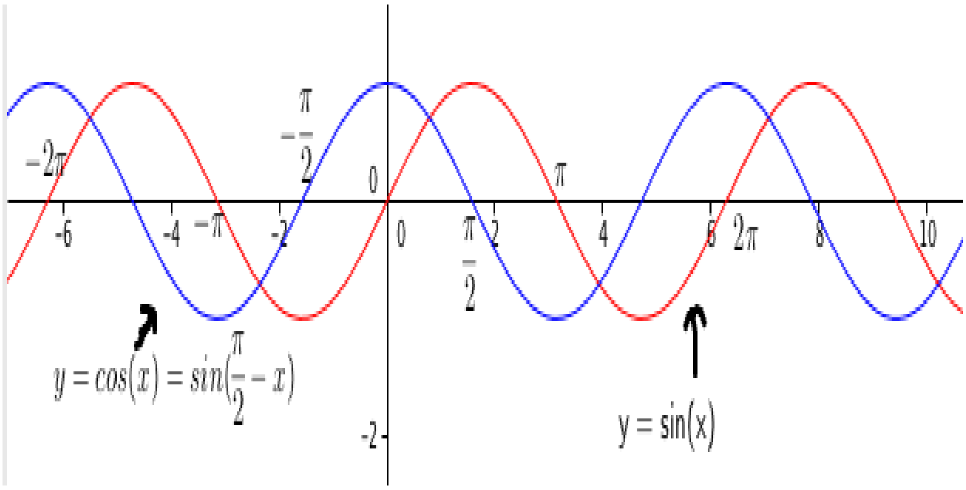
1. $cos(x) = 0 \iff cos(x) = cos(\frac{\pi}{2})$
   $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
2. $sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff sin(x) = sin(\frac{\pi}{4}) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 3\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
3. $tan(x) = \sqrt{3} \iff tan(x) = tan(\frac{\pi}{3}) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

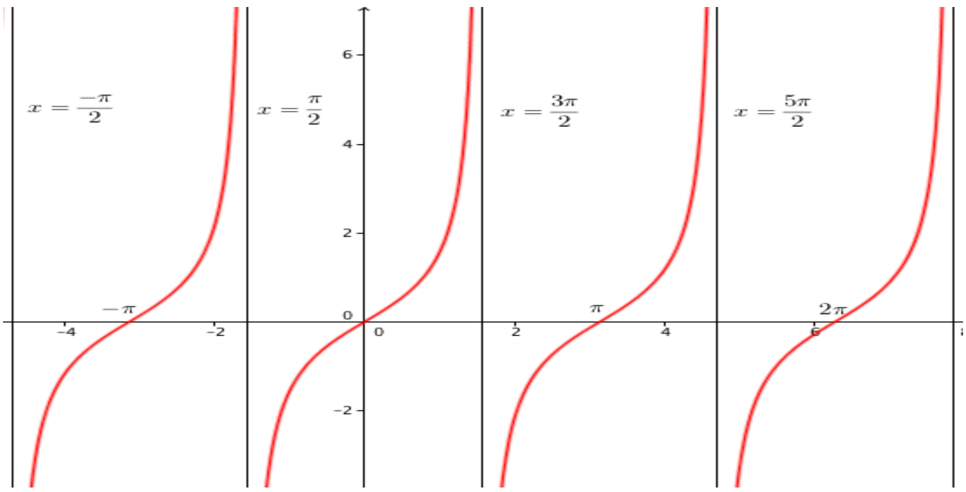
2.6 Les 3 fonctions trigonométriques de base :sin, cos et tan

2.6.1 Tableaux de variations

2.6.2 Tableaux de valeurs

2.6.3 Courbes





Chapitre 3

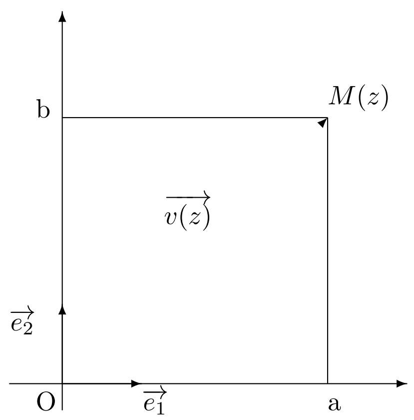
Forme trigonométriques des nombres complexes

3.1 Affixe d'un point, affixe d'un vecteur

3.1.1 Théorème

Soit P le plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\overrightarrow{P}$.
P est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
Alors

- l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\overrightarrow{P}$ qui à tout nombre complexe $z = a + ib$ associe le vecteur $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ est une bijection.
  On dit alors que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est le vecteur-image de z ou encore que z est l'affixe de $\overrightarrow{v}$. Ceci se note $\overrightarrow{v}(z)$
- l'application g de $\mathbb{C}$ dans P qui à tout nombre complexe $z = a + ib$ associe le point M de coordonnées (a, b) dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une bijection.
  On dit alors que le point M est le point-image de z ou encore que z est l'affixe de M. Ceci se note $M(z)$

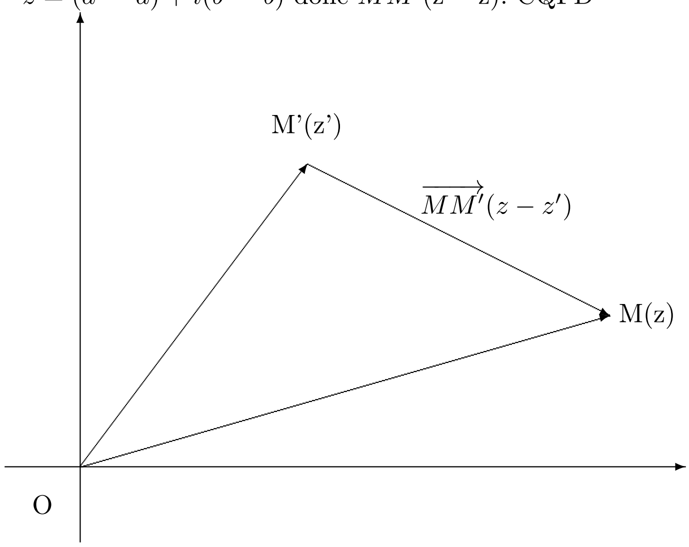


3.1.2 Théorème

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
Soit $M(z)$ et $M'(z')$ alors $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$

3.1.3 Démonstration

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = a'\overrightarrow{e_1} + b'\overrightarrow{e_2} - a\overrightarrow{e_1} - b\overrightarrow{e_2}$
$= (a' - a)\overrightarrow{e_1} + (b' - b)\overrightarrow{e_2}$
Or $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$ donc $\overrightarrow{MM'}$(z' - z). CQFD



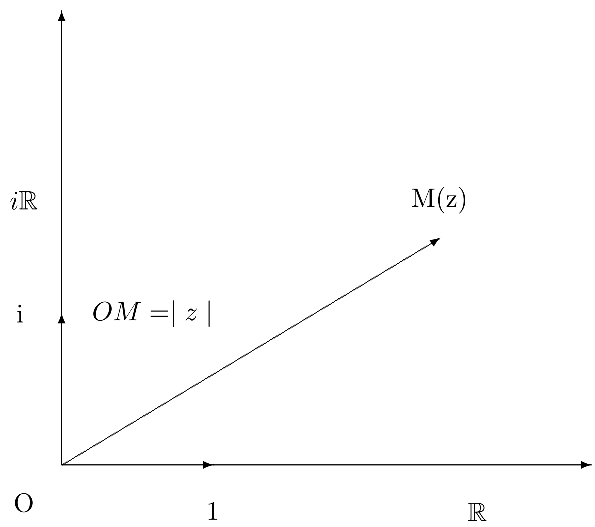
3.2 Module d'un nombre complexe

3.2.1 Définition

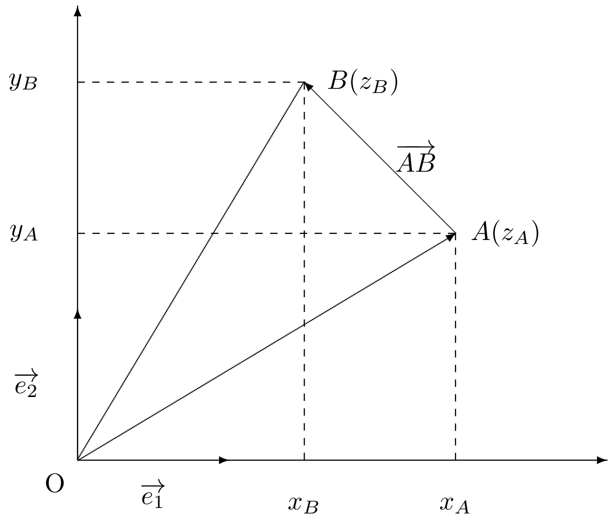
> Si z = a + ib, on appelle module de z nombre réel positif suivant noté
> $\mid z \mid = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

3.2.2 Interprétation géométrique de la notion de module

> $\mid z \mid = OM$; $\mid z \mid^2 = OM^2$;



$\mid z_A - z_B \mid = \mid z_{\overrightarrow{AB}} \mid = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$



3.2.3 Exemples

$| 0 |= 0$ $| i |= 1$ $| -i |= 1$ $| -2 |= 2$ $| 1+i\sqrt{3} |= 2$ $| 1+i |= \sqrt{2}$

3.2.4 Propriétés

Soient les nombres complexes z et z'

1. $| \overline{z} |=| z |=| -z |=| -\overline{z} |$
2. $| \overline{z} |\geq 0$
3. $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$
4. $| zz' |=| z || z' |$
5. si $z' \neq 0$ alors $| (\dfrac{1}{z'}) |= \dfrac{1}{| z' |}$
6. si $z' \neq 0$ alors $| (\dfrac{z}{z'}) |= \dfrac{| z |}{| z' |}$
7. $Re(z) \leq| z |$
8. $Im(z) \leq| z |$
9. $| z + z' |\leq| z | + | z' |$ (Inégalité triangulaire de Minkowski)
10. $|| z | - | z' ||\leq| z - z' |\leq| z | + | z' |$

3.2.5 Démonstrations

1. évident
2. évident

3. évident
4. $\mid zz' \mid = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{zz'\overline{z}\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = \mid z \mid\mid z' \mid$
5. $\mid \frac{1}{z'} \mid = \sqrt{\frac{1}{z'}(\overline{\frac{1}{z'}})} = \sqrt{\frac{1}{z'}\frac{1}{\overline{z'}}} = \frac{1}{\sqrt{z'\overline{z'}}} = \frac{1}{\mid z' \mid}$
6. évident en utilisant les 2 propriétés précédentes.
7. $Re(z) = a \leq \mid a \mid = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = \mid z \mid$
8. $Im(z) = b \leq \mid b \mid = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = \mid z \mid$
9. Comme les 2 membres de l'inégalité sont tous deux positifs, il suffit de comparer leurs carrés
   $(\mid z+z' \mid)^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$
   $= \mid z \mid^2 + \underbrace{z\overline{z'} + z'\overline{z}}_{z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}} + \mid z' \mid^2 = \mid z \mid^2 + 2Re(z\overline{z'}) + \mid z' \mid^2$
   $\leq \mid z \mid^2 + 2 \mid zz' \mid + \mid z' \mid^2$ car $Re(z) \leq \mid z \mid$
   $\leq (\mid z \mid + \mid z' \mid)^2$ CQFD
10. l'inégalité de droite $\mid z - z' \mid \leq \mid z \mid + \mid z' \mid$ est l'expression de l'inégalité triangulaire de Minkowski car $\mid -z' \mid = \mid z' \mid$
    Reste à démontrer l'inégalité de gauche :
    $\mid z' \mid = \mid z + (z'-z) \mid \leq \mid z \mid + \mid z' - z \mid$ donc $\alpha = \mid z' \mid - \mid z \mid \leq \mid z' - z \mid = \beta$
    De même, en permutant les rôles de z et de z',
    l'on a : $-\alpha = \mid z \mid - \mid z' \mid \leq \mid z - z' \mid = \beta$
    De ces deux inégalités, $\alpha \leq \beta$ et $-\alpha \leq \beta$ on en déduit que $\mid \alpha \mid \leq \beta$ c'est-à–dire que $\mid\mid z \mid - \mid z' \mid\mid \leq \mid z - z' \mid$

3.2.6 $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel euclidien réel

Théorème

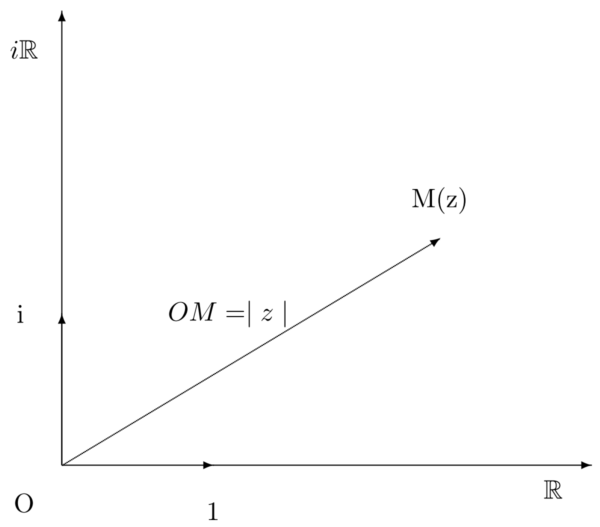
> L'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui à tout nombre complexe z associe $\mid z \mid$ est un homomorphisme non injectif de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$

Théorème

> L'application ϕ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple de nombres complexes (z,z') associe le nombre réel ϕ(z,z') $= \frac{1}{2}(z\overline{z'} + \overline{z}z')$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$ c'est-à-dire une forme bilinéaire définie positive.
> De plus, $\|z\| = \sqrt{\phi(z,z)} = \frac{1}{2}(z\overline{z} + \overline{z}z) = \sqrt{z\overline{z}} = \mid z \mid$

Proposition

> $(1, i)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}$



3.3 Argument d'un nombre complexe non nul

3.3.1 Rappels sur les angles de vecteurs

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ existe lorsque $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$
2. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ existe lorsque $M \neq A$ et $M \neq B$
3. si α est une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ alors $\forall k \in \mathbb{Z}$
   $\alpha + 2k\pi$ est aussi une mesure de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
4. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$. C'est la relation de Michel CHASLES pour les angles de vecteurs

3.3.2 Argument d'un nombre complexe de module 1

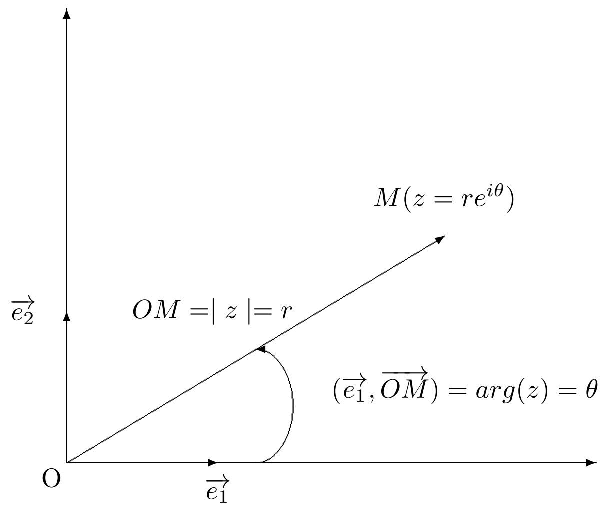
On appelle $\mathcal{U} = \{ z \in \mathbb{C} / \mid z \mid = 1\}$.
Alors $(\mathcal{U}, \times)$ est un sous-groupe du groupe $((\mathbb{C}^*, \times)$

Démonstration :

- $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}*$
- soit z $\in \mathcal{U}$ soit z' $\in \mathcal{U}$ alors $\mid zz' \mid = \mid z \mid\mid z' \mid = 1 \times 1 = 1$ donc z z' $\in \mathcal{U}$
- soit z $\in \mathcal{U}$ alors $\mid \frac{1}{z} \mid = \frac{1}{\mid z \mid} = \frac{1}{1} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathcal{U}$

Remarque : soit z $\in \mathcal{U}$ alors $\frac{1}{z} = \frac{z\overline{z}}{z} = \overline{z}$

3.3.3 Argument d'un nombre complexe non nul



Si z $\neq$ 0 alors on peut considérer l'angle ($\overrightarrow{e_1}$,$\overrightarrow{OM}$) de mesure θ en radians
Si l'on note r le module de z , on obtient : z = x + i y = r cos(θ) + i r sin(θ) = r (cos(θ) + i sin(θ)) = r exp($i\theta$) = r $e^{i\theta}$ (Notation d'Euler)
Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique de z.
θ = une mesure de l'angle($\overrightarrow{e_1}$,$\overrightarrow{OM}$)s'appelle un petit argument de z et se note arg(z)
z a une infinité d'arguments qui diffèrent de 2k π
L'angle ($\overrightarrow{e_1}$,$\overrightarrow{OM}$) s'appelle grand argument de z et se note Arg(z)

[1]

3.3.4 Relations entre forme trigonométrique et forme algébrique

3 démarches pour trouver cette forme trigonométrique :

1. utiliser la position géométrique de z lorsqu'elle est évidente :
   Par exemple :
   $1 = 1[\cos(0) + \sin(0)] = e^{i0} = e^{2i\pi}$
   $-1 = 1[\cos(\pi) + \sin(\pi)] = e^{i\pi}$ d'où **la formule divine d'Euler** :
   $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$
   $i = 1[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$
   $-i = 1[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}] = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

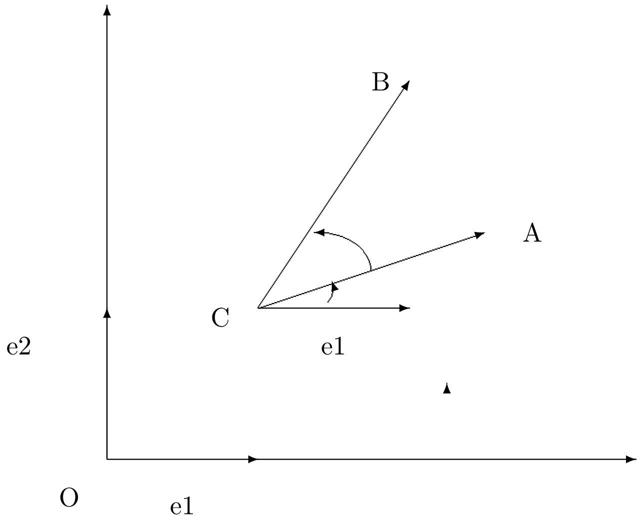
1. 0 est le seul nombre complexe qui a un module 0 mais qui n'a pas d'argument !

2. Bien observer l'écriture de z et la mettre sous la forme
   z = nombre positif [cos(mesure d'un angle) + i sin(cette même mesure d'angle] :
   Exemples :
   $1+i=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
   $\sin(\theta)+i\cos(\theta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=e^{i\frac{\pi}{2}-\theta}$
   $(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'a pas pour module $(1-\sqrt{2})$ qui est un réel négatif!
   [2] En réalité,$(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}=(\sqrt{2}-1)(-1)e^{i\frac{\pi}{4}}=(\sqrt{2}-1)e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}$
   $=(\sqrt{2}-1)e^{5i\frac{\pi}{4}}$ donc a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{5\pi}{4}$
3. utiliser les formules de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique (ou vice-versa) :
   si z = x + iy alors
   $$\begin{cases} x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta) \end{cases}$$
   $\Longleftrightarrow$
   $$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos(\theta)=\frac{x}{r} \\ \sin(\theta)=\frac{y}{r} \end{cases}$$

3.3.5 Propriétés

1. **r** $e^{i\theta}$ **r'** $e^{i\theta'}$ = **r r'** $e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{1}{re^{i\theta}}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
4. **Formule d'Abraham Moivre (Vitry le François 1667-Londres 1754) :**
   $\forall k\in\mathbb{Z}\ (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^k=\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$
   Démonstration :
   Par récurrence sur $\mathbb{N}$ puis extension à $\mathbb{Z}$

3.3.6 Module et argument de $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$



Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

$$\mid z_A - z_B \mid = \mid z_{\overrightarrow{AB}} \mid = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)$$

donc pour tout $C(z_C)$ on a :

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\mid z_B - z_C \mid}{\mid z_A - z_C \mid} = \mid \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \mid$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CA}) = arg(z_{\overrightarrow{CB}}) - arg(z_{\overrightarrow{CA}}) = arg(\frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}) = arg(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C})$$

Théorème

> Dans un repère orthonormé direct. Soit A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Soit un réel $r > 0$ et un réel θ alors on a l'équivalence logique suivante :
>
> $\dfrac{CB}{CA} = r$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \theta \Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = re^{i\theta}$

Conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z = 0 \ ou \ \exists k \in \mathbb{Z} \ arg(z) = k\pi$$

$$z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow Im(z) = 0 \ et \ Re(z) \geq 0 \Leftrightarrow z = 0 \ ou \ \exists k \in \mathbb{Z} \ arg(z) = 2k\pi$$

$$z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow Im(z) = 0 \ et \ Re(z) \leq 0 \Leftrightarrow z = 0 \ ou \ \exists k \in \mathbb{Z} \ arg(z) = \pi + 2k\pi$$

Conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à $i\mathbb{R}$,$i\mathbb{R}^+$,$i\mathbb{R}^-$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = 0 \ ou \ \exists k \in \mathbb{Z} \ arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow Re(z) = 0 \ et \ Im(z) \geq 0 \Leftrightarrow z = 0 \ ou \ \exists k \in \mathbb{Z} \ arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$z \in i\mathbb{R}^- \Leftrightarrow Re(z) = 0 \ et \ Im(z) \leq 0 \Leftrightarrow z = 0 \ ou \ \exists k \in \mathbb{Z} \ arg(z) = \frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi$$

Applications géométriques

Dans un repère orthonormé direct. Soit A,B et M d'affixes respectives z_A, z_B et z. Soit un réel $r > 0$ et un réel θ alors on a l'équivalence logique suivante :

$$\frac{z_B - z}{z_A - z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = r \ et \ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta \ (modulo 2\pi)$$

Si r = 1

$\frac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow$ M $\in$ la médiatrice de [AB]

Si r $\neq$ 1

$\frac{MB}{MA} = r \Leftrightarrow$ M $\in$ au cercle d'APPOLONIUS associe à A, B et r .

Ce cercle est le cercle de diamètre [IJ] où I est le barycentre de $\{(A, 1), (B, r)\}$ et J est le barycentre de $\{(A, 1), (B, -r)\}$

Si $\theta = 0 + 2k\pi$ alors :

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0 \ (modulo \ 2 \ \pi) \Leftrightarrow$ M $\in$ la droite (AB) privée du segment [AB]

Si $\theta = \pi + 2k\pi$ alors :

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi \ (modulo \ 2 \ \pi) \Leftrightarrow$ M $\in$ le segment ouvert]AB[

Si $\theta \neq k\pi$ alors :

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta \ (modulo \ 2 \ \pi) \Leftrightarrow$ M $\in$ l'arc de cercle capable associé à A,B et θ

3.3.7 Racines n-ièmes complexes d'un nombre complexe non nul

1. **Lemme** :

> $\forall x > 0\ \forall y > 0\ \forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}\ y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

2. **Etude**
Soit Z $\neq 0$. Posons Z $= Re^{i\alpha}$. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$.
$z^n = Z \Leftrightarrow (re^{i\theta})^n = Re^{i\alpha} \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = Re^{i\alpha}$
$\Leftrightarrow r^n = R$ et $\exists k \in \mathbb{Z} \quad n\theta = \alpha + 2k\pi$
$\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{R}$ et $\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$.
Lorsque k décrit $\mathbb{Z}$, les $\dfrac{2k\pi}{n}$ ne prennent que n valeurs distinctes : ce sont celles qui correspondent aux n cas suivants :
k = 0, k = 1, ..., k = n-1

3. **Théorème**

> Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. Soit Z $\neq 0$ avec $Z = R\ e^{i:\alpha}$
> L'équation $z^n = Z$ d'inconnue complexe z admet n solutions complexes :
> Ce sont les nombres $z_k = \sqrt[n]{R}\ e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ où $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.
> **Ces n solutions s'appellent les racines-nièmes complexes de Z**
> .

4. **Corollaire : Racines n-ièmes de l'unité**

> Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. Soit Z $\neq 0$
> L'équation $z^n = 1$ d'inconnue complexe z admet n solutions complexes :
> Ce sont les nombres $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.
> Ces n solutions s'appellent les racines-nièmes complexes de l'Unité .
> Leur ensemble s'appelle U_n et U_n **est un groupe cyclique d'ordre** n engendré par $z_1 = e^{i\dfrac{2\pi}{n}}$

5. **Racines carrées complexes de 1**

> L'équation $z^2 = 1$ d'inconnue complexe z admet 2 solutions complexes :
> Ce sont les nombres $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2}}$ où $k \in \{0, 1\}$ c'est-à-dire 1 et - 1.

6. **Racines carrées cubiques complexes de 1**

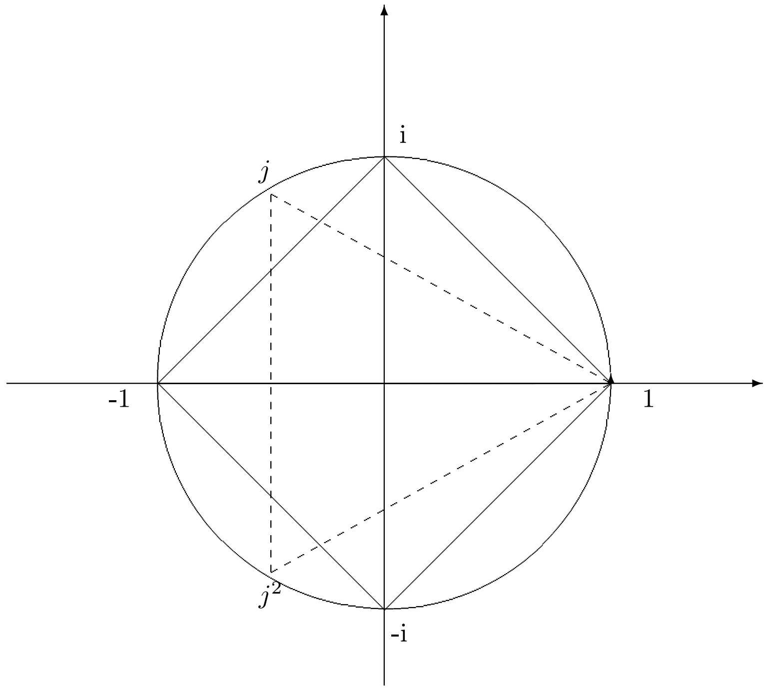
> L'équation $z^3 = 1$ d'inconnue complexe z admet 3 solutions complexes :
> Ce sont les nombres $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où $k \in \{0, 1, 2\}$
> c'est-à-dire $1, j = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$ et $j^2 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})$

7. **Racines carrées quatrièmes complexes de 1**

> L'équation $z^4 = 1$ d'inconnue complexe z admet 4 solutions complexes :
> Ce sont les nombres $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$ où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
> c'et-à-dire 1, i, -1, -i

8. **Images des racines carrées n-ièmes complexes de 1**

> Les racines n-ièmes de l'unité ont des images sur le cercle trigonométrique qui forment un polygône régulier convexe dont un des sommets est 1.



De plus leur somme S est nulle. En effet, en posant $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$\boxed{S = 1 + w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^{n-1} = \frac{1 - w_1^n}{1 - w_1} = 0}$

pour n $= \mathbf{3}$, on a $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$ **pour n** $= \mathbf{4}$, on a $\boxed{1 + i + (-1) + (-i) = 0}$

Autre propriété :

> w_1^{n-k} a pour conjugué et pour inverse w_1^k

9. **Relations entre les racines carrées n-ièmes complexes de Z et celles de 1**

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. Soit $Z \neq 0$. Soit v une racine n-ième de Z

$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = v^n \Leftrightarrow (\frac{z}{v})^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{v}$ est une racine n-ième del'unité

Théorème :

> Si on connaît une racine n-ième v de $Z \neq 0$, pour trouver toutes les racines n-ièmes de Z, il suffit de multiplier v par toutes les racines n-ièmes de l'unité.

Par exemple, si l'on cherche les solutions de $Z^3 = 27$, on peut vérifier que $3^3 = 27$ donc 3 est une racine-troisième de 27 donc toutes les racines troisièmes de 27 sont $3, 3j$ et $3j^2$

3.3.8 Applications trigonométriques

Formules de multiplication des arcs

Il s'agit de calculer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ pour $n = 2, 3, 4$ à l'aide des formules du binôme de Newton et de Moivre.

1. soit $\theta \in \mathbb{R}$
   alors $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta)$
   Or $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$
   donc $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ **et** $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$
2. soit $\theta \in \mathbb{R}$
   alors $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta)+3\cos^2(\theta)i\sin(\theta)+3\cos(\theta)(i\sin(\theta))^2 + (i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)i\sin(\theta) - 3\cos(\theta)(\sin(\theta))^2 - i(\sin(\theta))^3$
   Or $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$
   donc
   $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$
   $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$
3. De même,
   $\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$
   $\sin(4\theta) = 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$

Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

Il s'agit de transformer un polynôme en $\sin(x)$ et en $\cos(x)$ en une somme de cosinus et de sinus d'un multiple de x.
Procédé :
Si $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{1}{\overline{z}} \in \mathbb{U}$.
Comme $z \in \mathbb{U}$ alors $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
alors $\overline{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ et $z\overline{z} =\mid z \mid= 1$ donc

$$\left\{\begin{array}{l} z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ \overline{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{array}\right.$$

D'après la formule de Moivre

$$\left\{\begin{array}{l} z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\ \overline{z}^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) \end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(n\theta) = \dfrac{1}{2}(z^n + \overline{z}^n) \\ \\ \sin(n\theta) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}^n) \end{array}\right.$$

Exemples :

1. **Linéariser** $\sin^5(x)$
   On utilisera les formules d'Euler-Moivre.
   $$\begin{cases} e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \\ e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx) \end{cases}$$
   donc
   $$\begin{cases} \cos(nx) = \dfrac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \\ \sin(nx) = \dfrac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \end{cases}$$
   Alors $\sin^5(x) = (\sin(x))^5 = (\dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}))^5$
   $= \dfrac{e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}}{2^5 i^5}$
   $= \dfrac{e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})}{32i}$
   $= \dfrac{2i\sin(5x) - 5(2i\sin(3x)) + 10(2i\sin(x))}{32i}$
   $= \dfrac{1}{16}\sin(5x) - \dfrac{5}{16}\sin(3x) + \dfrac{5}{8}\sin(x)$
2. **Linéariser** $\cos^3(\theta)$.
   $\cos^3(\theta) = [\dfrac{1}{2}(z^3 - \overline{z}^3)] = \dfrac{1}{8}(z^3 + 3z^2\overline{z} + 3z\overline{z}^2 + \overline{z}^3) = \dfrac{1}{8}(z^3 + \overline{z}^3 + 3z\overline{z}(z + \overline{z}))$
   $= \dfrac{1}{8}(2\cos(3\theta) + 3.2\cos(\theta)) = \dfrac{1}{4}\cos(3\theta) + \dfrac{3}{4}\cos(\theta))$
3. **Linéariser** $\sin^3(\theta)$**.**
   $\sin^3(\theta) = [\dfrac{1}{2i}(z^3 + \overline{z}^3)] = \dfrac{i}{8}(z^3 - 3z^2\overline{z} + 3z\overline{z}^2 - \overline{z}^3) = \dfrac{i}{8}(z^3 - \overline{z}^3 - 3z\overline{z}(z - \overline{z}))$
   $= \dfrac{i}{8}(2i\sin(3\theta) - 3.2i\sin(\theta)) = \dfrac{-1}{4}\sin(3\theta) + \dfrac{3}{4}\sin(\theta))$
4. **Linéariser** $\cos^4(\theta)$. On démontre que :
   $\cos^4(\theta) = \dfrac{1}{8}\cos(4\theta) + \dfrac{1}{2}\cos(2\theta) + \dfrac{3}{8}$
5. **Linéariser** $\sin^4(\theta)$.
   On démontre que :
   $\sin^4(\theta) = \dfrac{1}{8}\cos(4\theta) + \dfrac{-1}{2}\cos(2\theta) + \dfrac{3}{8}$
6. **Linéariser** $\sin^3(\theta)\cos^4(\theta)$.
   $\cos^4(\theta)\sin^3(\theta) = (\sin(\theta)\cos(\theta))^3\cos(\theta) = (\dfrac{\sin(2\theta)}{2})^3\cos(\theta)$
   $= \dfrac{1}{8}(\dfrac{-1}{4}\sin(6\theta) + \dfrac{3}{4}\sin(2\theta))\cos(\theta)$

3.3.9 Résolution de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

1. $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$.
   Soit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
   (a) ou bien $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution $z = \dfrac{-b}{2a}$
   (b) ou bien $\Delta \neq 0$ alors l'équation a 2 solutions :
   $z' = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z" = \dfrac{-b+\delta}{2a}$
   où δ est une racine carrée complexe de Δ
2. $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$
   Soit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
   (a) ou bien $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution $z = \dfrac{-b}{2a}$
   (b) ou bien $\Delta > 0$ alors l'équation a 2 solutions réelles distinctes :
   $z' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z" = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
   (c) ou bien $\Delta < 0$ alors l'équation a 2 solutions complexes conjuguées
   $z' = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z" = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Chapitre 4

Exercices

4.1 Problèmes classiques

4.1.1 Mesures des angles d'un triangle

1. Démontrer que la somme des mesures des trois angles d'un triangle propre mesure π *radians* ou 180
2. En déduire la valeur des trois angles d'un triangle équilatéral.
3. En déduire aussi la valeur des trois angles d'un triangle rectangle isocèle.

4.1.2 Construction à la règle et au compas$de\sqrt{2}$

1. Soit un carré $ABCD$ de côté de longueur $a > 0$. Déterminer la valeur exacte de la diagonale AC
2. En déduire une construction à la règle et au compas de $\sqrt{2}$

4.1.3 Constructions à la règle et au compas de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{3}$

1. Soit un triangle équilatéral ABC de côté de longueur $a > 0$. Soit H le pied de la hauteur issue de A.
   Déterminer la valeur exacte de la hauteur AH
2. En déduire une construction à la règle et au compas de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis de $\sqrt{3}$.

4.1.4 Exercice

Un triangle ABC est rectangle en A.

4.2 Calculs approchés de rapports trigonométriques

4.2.1 Calculatrice

A l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de :

- $sin(34)$; $cos(48)$; $cos(2530\text{''}15\text{''})$; $tan(5442'15\text{''})$
- $cotan(16\ gr)$
- $tan(-3,5\ rd)$; $sin\left(\frac{3\pi}{7}\ rd\right)$

4.2.2 Calculatrice

A l'aide d'une calculatrice, exprimer d'abord en degrés décimaux puis en degrés, minutes et secondes , une valeur approché de la mesure x d'un angle ayant pour :

- sinus $0,6428$
- sinus $0,8746$
- tangente $0,2729$
- cotangente $0,4723$

4.3 Représentations d'arcs sur le cercle trigonométrique

Colorier sur un cercle trigonométrique l'arc de cercle correspondant aux points M tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ mesure x dans les cas suivants :

- $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$
- $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$
- $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\pi$
- $-\frac{11\pi}{3} \leq x \leq -\frac{10\pi}{3}$

4.4 Expressions trigonométriques

4.4.1 Exercice

Simplifier les expressions suivantes :

1. $cos(\pi - x) - cos(-x)$
2. $sin(\pi + x) + cos(\frac{\pi}{2} - x)$
3. $sin(\pi - x) + cos(x + \frac{\pi}{2})$
4. $cos(\pi - x) + sin(x + 3\pi)$
5. $sin(x - 3\pi) + sin(x + 3\pi)$
6. $cos(\frac{5\pi}{2} + x)$
7. $(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\sin(x) - \cos(x))^2$
8. $\cos(x) + \cos(\pi + x) + cos(2\pi + x) + cos(3\pi + x)$
9. $\cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(3\frac{\pi}{8}) + cos(5\frac{\pi}{8}) + cos(7\frac{\pi}{8})$
10. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \pi) + \sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(x + 2\pi)$
11. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{7\pi}{2})$
12. $\sin(x + \pi) + \cos(\pi - x) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 7\pi)$
13. $\cos^3(x) + \cos^2(x)\sin(x) + \cos(x)\sin^2(x) + \sin^3(x)$

Corrigé

Simplifier les expressions suivantes :

1. $cos(\pi - x) - cos(-x) = -cos(x) - cos(x) = \boxed{-2\ cos(x)}$
2. $sin(\pi + x) + cos(\frac{\pi}{2} - x) = -sin(x) + sin(x) = \boxed{0}$
3. $sin(\pi - x) + cos(x + \frac{\pi}{2}) = sin(x) - sin(x) = \boxed{0}$
4. $cos(\pi-x)+sin(x+3\pi) = -cos(x)+sin(x+\pi+2\pi) = -cos(x)+sin(x+\pi)$
   $= \boxed{-cos(x) - sin(x)}$
5. $sin(x - 3\pi) + sin(x + 3\pi) = sin(x - \pi - 2\pi) + sin(x + \pi + 2\pi)$
   $= sin(x-\pi)+sin(x+\pi) = -sin(\pi-x)+sin(x+\pi) = -sin(x)-sin(x) =$
   $\boxed{-2\ sin(x)}$
6. $cos(\frac{5\pi}{2} + x) = cos(2\pi + \frac{\pi}{2} + x) = cos(\frac{\pi}{2} + x) = \boxed{-sin(x)}$
7. $(sin(x) + cos(x))^2 + (sin(x) - cos(x))^2$
   $= sin^2(x)+2\ sin(x)\ cos(x)+cos^2(x)+sin^2(x)-2\ sin(x)\ cos(x)+cos^2(x)$
   $= 2(sin^2(x) + cos^2(x)) = \boxed{2}$
8. $cos(x) + cos(\pi + x) + cos(2\pi + x) + cos(3\pi + x)$
   $= cos(x) + cos(\pi + x) + cos(+x) + cos(\pi + x) = 2cos(x) + 2cos(\pi + x)$
   $= 2cos(x) - 2cos(x) = \boxed{0}$

9. $cos(\frac{\pi}{8}) + cos(\frac{3\pi}{8}) + cos(\frac{5\pi}{8}) + cos(\frac{7\pi}{8})$
$= cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(\pi - \frac{5\pi}{8}) + cos(\frac{5\pi}{8}) + cos(\pi - \frac{\pi}{8})$
$= cos(\frac{\pi}{8}) - \cos(\frac{5\pi}{8}) + cos(\frac{5\pi}{8}) - cos(\frac{\pi}{8}) = \boxed{0}$

10. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \pi) + \sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(x + 2\pi)$
$= \cos(x) + \sin(x) + \sin(x + \frac{3\pi}{2} - 2\pi) + \sin(x)$
$= \cos(x)+\sin(x)+\sin(x-\frac{\pi}{2})+\sin(x) = \cos(x)+\sin(x)-\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\sin(x)$
$= \cos(x) + \sin(x) - \cos(x) + \sin(x) = \boxed{2\sin(x)}$

11. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{7\pi}{2})$
$\sin(x) - \cos(x) + \cos(\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x) - \sin(x - \frac{7\pi}{2} + \frac{8\pi}{2})$
$= \sin(x) - \cos(x) + \cos(4\pi - \frac{\pi}{2} - x) - \sin(x - \frac{7\pi}{2} + 4\pi)$
$= \sin(x) - \cos(x) + \cos(-\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x - \frac{\pi}{2})$
$= \sin(x) - \cos(x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
$= \sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(x) = \boxed{0}$

12. $\sin(x + \pi) + \cos(\pi - x) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 7\pi)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(x - \pi + 8\pi)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(x - \pi)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(\pi - x)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = \boxed{-2\sin(x) - 2\cos(x)}$

13. $\cos^3(x) + \cos^2(x)\sin(x) + \cos(x)\sin^2(x) + \sin^3(x)$
$= \cos^3(x) + \cos(x)\sin^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) + +\sin^3(x)$
$= \cos(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) + \sin(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)$
$= (\cos(x) + \sin(x))\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)$
$= \boxed{\cos(x) + \sin(x)}$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

4.5 Equations trigonométriques

4.5.1 Exercice

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x et où a est un paramètre réel.

1. $cos(x) = a$
2. $sin(x) = a$
3. $tan(x) = a$

Corrigé

1. - si $a \notin [-1;1]$ alors $cos(x) = a$ n'a pas de solution.
   - si $a \in [-1;1]$ il existe une seule valeur $x_0 \in [0;\pi]$ telle que $cos(x_0) = a$ c'est $x_0 = Arccos(a)$
     Alors $cos(x) = a \iff cos(x) = cos(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$
2. - si $a \notin [-1;1]$ alors $sin(x) = a$ n'a pas de solution.
   - si $a \in [-1;1]$ il existe une seule valeur $x_0 \in [-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$ telle que $sin(x_0) = a$ c'est $x_0 = Arcsin(a)$
     Alors $sin(x) = a \iff sin(x) = sin(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - x_0 + 2k\pi$
3. il existe une seule valeur $x_0 \in]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$ telle que $tan(x_0) = a$ c'est $x_0 = Arctan(a)$
   Alors $tan(x) = a \iff tan(x) = tan(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi + x_0 + 2k\pi$

4.5.2 Exercice

Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x.

1. (a) $cos(x) = 1$
   (b) $cos(x) = 0$
   (c) $cos(x) = \frac{1}{2}$
   (d) $cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. (a) $sin(x) = 1$
   (b) $sin(x) = 0$
   (c) $sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   (d) $sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. (a) $tan(x) = 1$
   (b) $tan(x) = 0$
   (c) $tan(x) = \sqrt{3}$
   (d) $tan(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Corrigé

Toutes les équations suivantes ont pour ensemble de définition : $\mathbb{R}$:

1. (a) $cos(x) = 1 \iff cos(x) = cos(0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 0 + 2k\pi$ ou $x = -0 + 2k\pi$ donc $S = \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$
   (b) $cos(x) = 0 \iff cos(x) = cos(\frac{\pi}{2}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
   Or $-\frac{\pi}{2}+2k\pi = \frac{\pi}{2}-\pi+2k\pi = \frac{\pi}{2}+(2k-1)\pi$ donc $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (c) $cos(x) = \frac{1}{2} \iff cos(x) = cos(\frac{\pi}{3}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
   donc $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (d) $cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff cos(2x) = cos(\frac{\pi}{6}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$
   donc $S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi; -\frac{\pi}{12} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. (a) $sin(x) = 1 \iff sin(x) = sin(\frac{\pi}{2}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
   donc $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $sin(x) = 0 \iff sin(x) = sin(0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - 0 + 2k\pi = (2k+1)/pi$
donc $S = \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff sin(x) = sin(\frac{\pi}{4}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
donc $S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff sin(2x) = sin(\frac{\pi}{3}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{6} + k\pi$
donc $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{\pi}{3} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. (a) $tan(x) = 1 \iff tan(x) = tan(\frac{\pi}{4}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
donc $S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $tan(x) = 0 \iff tan(x) = tan(0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 0 + 2k\pi$ ou $x = \pi + 0 + 2k\pi = (2k+1)\pi$
donc $S = \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $tan(x) = \sqrt{3} \iff tan(x) = tan(\frac{\pi}{3}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
donc $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $tan(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff tan(2x) = tan(\frac{\pi}{6}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$
donc $S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$

4.5.3 Exercice

$tan(a+b) = \dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$.
Les 4 conditions d'existence sur a et b de cette formule sont :

1. $tan(a+b)$ existe c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
2. $tan(a)$ existe c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
3. $tan(b)$ existe c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
4. $1 - tan(a)tan(b) \neq 0$

Démontrer que les 3 premières conditions suffisent car elles entraînent automatiquement la 4-ième.

Corrigé

En effet,

- ou bien $tan(b) \neq 0$ c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ b \neq k\pi$
  Alors $1-tan(a)tan(b) = 0 \iff tan(a) = \dfrac{1}{tan(b)} \iff tan(a) = cotan(b) \iff tan(a) = tan(\dfrac{\pi}{2} - b) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \dfrac{\pi}{2} - b + 2k\pi$ ou $a = \pi + \dfrac{\pi}{2} - b + 2k\pi \iff a + b = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
  Or ceci n'est pas possible à cause de la condition 1.
- ou bien $tan(b) = 0$ c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{Z}\ b = k\pi$ mais alors $1-tan(a)tan(b) = 1 \neq 0$

4.5.4 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$2\cos^2(x) - \sin(5x) - 1 = 0$$

Corrigé

$2\cos^2(x) - \sin(5x) - 1 = 0$

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathcal{D} \quad 2\cos^2(x) - \sin(5x) - 1 = 0 \iff 2\cos^2(x) - 1 = \sin(5x)$
  $\iff \cos(2x) = \sin(5x) \iff \cos(2x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} - 5x)$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2x = \dfrac{\pi}{2} - 5x + 2k\pi \quad$ ou $\quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 5x + 2k\pi$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 7x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad$ ou $\quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad -3x = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{7}$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{14} + 2k\pi \quad$ ou $\quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2k\pi}{3}$
- Alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \dfrac{\pi}{14} + 2k\pi \quad ; \quad \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2k\pi}{3} \right\}$

4.5.5 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante (E) d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

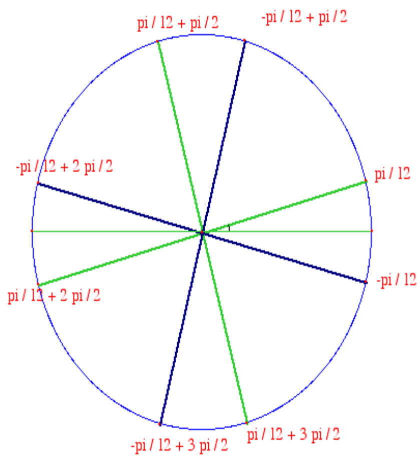
$$(E) : 4\sin(x)\sin(3x) - 2\cos(2x) + 1 = 0$$

Corrigé

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathcal{D}$
  $4\sin(x)\sin(3x) - 2\cos(2x) + 1 = 0$
  $\iff 4\left[\frac{1}{2}\left(\cos(x-3x) - cos(x+3x)\right)\right] - 2\cos(2x) + 1 = 0$
  car $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - cos(a+b)))$
  Donc $(E) \iff 2(\cos(-2x) - \cos(4x)) - 2\cos(2x) + 1 = 0 \iff 2\cos(2x) - 2\cos(4x) - 2\cos(2x) + 1 = 0$
  $\iff -2\cos(4x) + 1 = 0 \iff \cos(4x) = \frac{1}{2} \iff \cos(4x) = \cos(\frac{\pi}{3})$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \left\{\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ \text{ou } x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$
- Alors l'ensemble des solutions est :

  $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad / \quad k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \quad \{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\}$

  Ces solutions sont représentées par les points suivants sur le cercle trigonométrique :



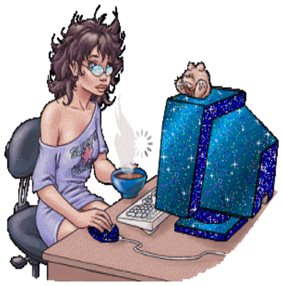
4.5.6 Bac C Paris

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(E) : \sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 0$$

Corrigé

1. $Def = \{x \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} sin(x) \geq 0 \\ \\ cos(x) \geq 0 \end{array}\right. \} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + 2k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi]$
2. Comme la somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si ces deux réels sont nuls alors :
   Alors $\sqrt{sin(x)} + \sqrt{cos(x)} = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} sin(x) = 0 \\ \\ cos(x) = 0 \end{array}\right.$
   Or ce système n'a pas de solutions car $\forall x \in \mathbb{R} \qquad sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
3. On en conclut que l'ensemble des solutions $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$



4.5.7 Bac C Paris (suite)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(E) : \sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1$$

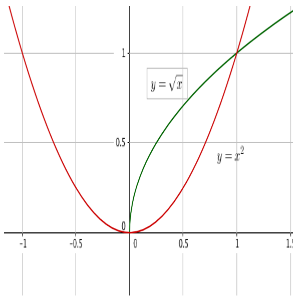
v 1 : Catherine FILIOLE, TC Lycée Schoelcher

$\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1$

- $Def = \{x \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} sin(x) \geq 0 \\ \\ cos(x) \geq 0 \end{array}\right. \} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + 2k\pi \ ; \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- $2k\pi \in \mathcal{S}$ car $\sqrt{\sin(2k\pi)} + \sqrt{\cos(2k\pi)} = 0 + 1 = 1$
- $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \mathcal{S}$ car $\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} + \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = 1 + 0 = 1$
- Par conséquent, $\{2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\} \subset \mathcal{S}$
- Ce sont les seules solutions car si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\left\{\begin{array}{l} 0 < \sin(x) < 1 \\ 0 < \cos(x) < 1 \end{array}\right.$

  donc $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\sin(x)} > \sin^2(x) \\ \sqrt{\cos(x)} > \cos^2(x) \end{array}\right.$ donc $\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} > 1$
- On en conclut que l'ensemble des solutions $\boxed{\mathcal{S} = \{2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}}$

L'idée de Catherine FILIOLE est basé sur le résultat suivant : Si $0 < X < 1$ alors $\sqrt{X} < X^2$
ce qui s'illustre aisément :



Corrigé 2

Toujours sur cette même idée :
$\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1 \iff \sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = \sin^2(x) + \cos^2(x)$
$\iff \sqrt{\sin(x)} - \sin^2(x) + \sqrt{\cos(x)} - \cos^2(x) = 0$
$\iff \sqrt{X} - X^2 + \sqrt{Y} - Y^2 = 0$ en posant $X = \sin(x)$ et $Y = \cos(x)$

$\iff \sqrt{X} - X^2 = \sqrt{Y} - Y^2 = 0$ puisque $\sqrt{X} - X^2 \geq 0$ et $\sqrt{Y} - Y^2 \geq 0$ car $0 \leq X \leq 1$ et $0 \leq Y \leq 1$
Donc $(E) \iff \sqrt{X} = X^2$ et $\sqrt{Y} = Y^2$
$\iff \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 1 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 0 \end{cases}$ impossible car $sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
ou $\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 1 \end{cases}$
ou $\begin{cases} \sin(x) = 1 \\ \cos(x) = 0 \end{cases}$
ou $\begin{cases} \sin(x) = 1 \\ \cos(x) = 1 \end{cases}$ impossible car $sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\iff \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 1 \end{cases}$
ou $\begin{cases} \sin(x) = 1 \\ \cos(x) = 0 \end{cases}$
$\iff x = 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Corrigé 3 : Sonia FILIOLE, TC Lycée Schoelcher

4.5.8 Equations de la forme $a\ cos(x) + b\ sin(x) = c$

1. Démontrer que pour tout réel x l'on a :

$$cos(x) + sin(x) = \sqrt{2}\ cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Quels sont les valeurs minimale et maximale de $cos(x) + sin(x)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $cos(x) + sin(x) = 2$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $cos(x) + sin(x) = 1$

Corrigé

1. (a) $\sqrt{2}\,cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(x) + sin\left(\frac{\pi}{4}\right)sin(x)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}sin(x)\right)$
$= cos(x) + sin(x)$

   (b) $\sqrt{2}\,sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(sin(x)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(x)\right) = \sqrt{2}\left(sin(x)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}cos(x)\right)$
$= sin(x) + cos(x)$

   (c) Donc l'on a :

$$cos(x) + sin(x) = \sqrt{2}\ cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. On a $\begin{cases} -1 \leq cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq sin(x) \leq 1 \end{cases}$ donc $2 \leq cos(x) + sin(x) \leq 2$.
Mais -2 et 2 ne sont pas les valeurs minimale et maximale de $cos(x) + sin(x)$. Les valeurs minimale et maximale sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ car
$-1 \leq\ cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ donc $-\sqrt{2} \leq cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$
3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $cos(x) + sin(x) = 2$
   - Méthode 1 :
   $-1 \leq cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq sin(x) \leq 1$ donc $-2 \leq cos(x) + sin(x) \leq 2$
   Par conséquent $cos(x) + sin(x) = 2 \Leftrightarrow cos(x) = 1$ et $sin(x) = 1$
   Donc $cos^2(x) + sin^2(x) = 2$. Impossible car $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
   Par conséquent , l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \emptyset$
   - Méthode 2 :
   $cos(x) + sin(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\ cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
   Impossible à résoudre car $\sqrt{2} \approx 1,414$ et $-1 \leq cos(X) \leq 1$
4. $cos(x) + sin(x) = 1 \iff \sqrt{2}\ cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\iff cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = 2k\pi \end{cases} \quad \text{Par conséquent, } \boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ 2k\pi\right\}}$$

4.6 Inéquations trigonométriques

4.6.1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$
2. $f(x) = \sqrt{1-\sin(x)}$
3. $f(x) = \tan(x)$
4. $f(x) = \dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$

Corrigé

1. $f(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$ existe à condition que $\begin{cases} 1+\cos(x) \text{ existe} \\ 1+\cos(x) \geq 0 \end{cases}$
   - $1+\cos(x)$ existe pour tout réel car $\cos(x)$ existe pour tout réel.
   - $1+\cos(x) \geq 0$ est vrai pour tout réel car $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $0 \leq 1+\cos(x) \leq 2$.
   - Par conséquent, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$
2. $f(x) = \sqrt{1-\sin(x)}$ existe à condition que $\begin{cases} 1-\sin(x) \text{ existe} \\ 1-\sin(x) \geq 0 \end{cases}$
   - $1-\sin(x)$ existe pour tout réel car $\sin(x)$ existe pour tout réel.
   - $1-\sin(x) \geq 0$ est vrai pour tout réel :
     En effet, $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$
     donc $1 \geq -\sin(x) \geq -1$ d'où $-1 \leq -\sin(x) \leq 1$.
     On en déduit que $0 \leq 1-\sin(x) \leq 2$.
   - Par conséquent, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$
3. $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ existe existe à condition que $\begin{cases} \sin(x) \text{ existe} \\ \cos(x) \text{ existe} \\ \cos(x) \geq 0 \end{cases}$
   - $\sin(x)$ existe pour tout réel.
   - $\cos(x)$ existe pour tout réel.
   - $\cos(x) = 0 \iff \cos(x) = \cos(\dfrac{\pi}{2})$

     $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

     $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
   - Par conséquent, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

4. $f(x) = \dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$ existe si et seulement si $\tan(x)$ existe et $1+\tan(x) \neq 1$.
   Par conséquent,
   $f(x)$ existe si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z} \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

   $$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ ;\frac{\pi}{4} + k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

   $$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad f(x) = tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

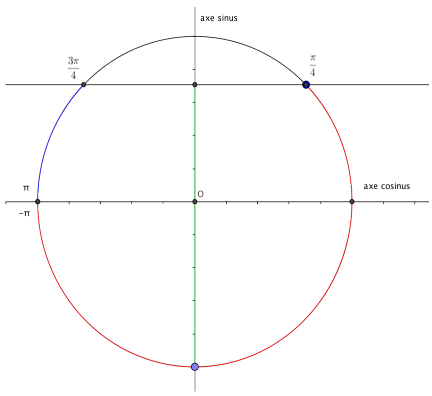
4.6.2 Inéquations

Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation suivantes d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(I) : \sqrt{2}\ sin(2x) - 1 < 0$$

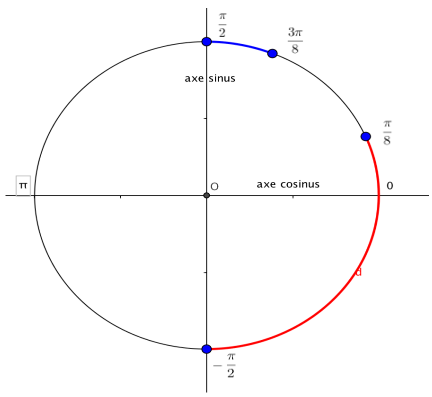
Corrigé

- L'ensemble de définition de cette inéquation est :$\mathcal{D} = [-\pi;\pi]$
- $\forall x \in \mathcal{D} \quad (I) \iff \sqrt{2}\ sin(2x) < 1 \iff sin(2x) < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff sin(2x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



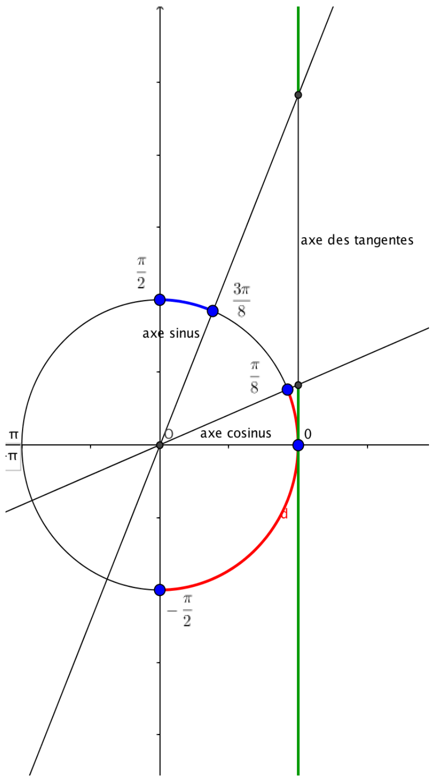
$$(I) \iff sin(2x) < sin(\frac{\pi}{4}) \iff \begin{cases} -\pi \leq 2x < \dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \dfrac{3\pi}{4} < 2x \leq \pi \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{8} \\ \text{ou} \\ \dfrac{3\pi}{8} < x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{8}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{8}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$



Corrigé Fernand ODONNAT du Vauclin

- L'ensemble de définition de cette inéquation est :$\mathcal{D} = [-\pi; \pi]$
- ou bien $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{2}$ alors $\sqrt{2}\ sin(2x) - 1 = -1 < 0$ donc $\{\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\} \subset \mathcal{S}$
- ou bien $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$ alors on peut poser $t = \tan(x)$ alors $sin(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$.
  Donc $(I) \iff \frac{2t}{1+t^2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff 4t < \sqrt{2} + \sqrt{2}t^2 \iff \sqrt{2}t^2 - 4t + \sqrt{2} > 0$
  $\Delta = (-2)^2 - \sqrt{2}\sqrt{2} = 4 - 2 = 2 > 0$
  L'équation $\sqrt{2}t^2 - 4t + \sqrt{2} = 0$ a deux solutions :
  $t_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 = tan(\frac{\pi}{8})$ et $t_2 = \sqrt{2} + 1 = tan(\frac{3\pi}{8})$
  Donc $(I) \iff t < t_1$ ou $t > t_2 \iff tan(x) < tan(\frac{\pi}{8})$ ou $tan(x) > tan(\frac{3\pi}{8})$
-
- L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{8}\right[\ \cup\ \left]\frac{3\pi}{8}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$



4.6.3 Inéquations

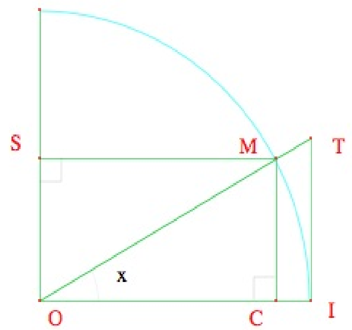
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $2\cos^2(x) > 1$
2. $\tan^2(x) - (\sqrt{3} - 1)\tan(x) - \sqrt{3} < 0$

4.7 Limites

4.7.1 Les 4 limites de base

Soit x un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ mesure x en radians.
On rappelle que l'aire d'un secteur angulaire de mesure x en radians dans un cercle de rayon R est $\frac{xR^2}{2}$



1. Que vaut OI ?
2. Exprimer , en fonction de x, les distances OC, OS et IT puis les aires des triangles OIM et OITainsi que l'aire du secteur angulaire IOM.
3. Prouver alors que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\sin(x) < x < \tan(x)$
4. En déduire que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$
5. Déterminer $\lim_{x\mapsto 0} \cos(x)$ puis $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\tan(x)}{x}$
6. Vérifier que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{1}{1+\cos(x)}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$
7. En déduire que $\lim_{x\mapsto 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et que $\lim_{x\mapsto 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

1. $OI = 1$ car I est sur le cercle trigonométrique.
2.
   - $OC = cos(x)$
   - $OS = sin(x)$
   - $IT = tan(x)$
   - $Aire(OIM) = \frac{OI \times CM}{2} = \frac{1 \times sin(x)}{2} = \frac{sin(x)}{2}$
   - $Aire(OIT) = \frac{OI \times IT}{2} = \frac{1 \times tan(x)}{2} = \frac{tan(x)}{2}$

- l'aire du secteur angulaire IOM.est $\dfrac{x}{2}$

3. Soit $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$
Par construction, l'aire du secteur angulaire est comprise entre l'aire du triangle OIM et l'aire du triangle OIT
donc $\dfrac{sin(x)}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{tan(x)}{2}$. En multipliant les membres des deux inégalités par 2 qui est un nombre positif on obtient
$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

4. Soit $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ alors
   - Comme $sin(x) < x$ et comme $x > 0$ alors $\dfrac{sin(x)}{x} < 1$.
   - Comme $x < tan(x)$ alors $x < \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$ donc $\dfrac{cos(x)}{x} < \dfrac{1}{x}$.
   Or $sin(x) > 0$ car $x > 0$ donc $sin(x)\dfrac{cos(x)}{x} < sin(x)\dfrac{1}{x}$ d'où $cos(x) < \dfrac{sin(x)}{x}$
   - En conclusion, $cos(x) < \dfrac{sin(x)}{x} < 1$

5. - $\lim\limits_{x \mapsto 0} \cos(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} 1 = 1$ donc d'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite alors $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
   - Soit $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ alors $\dfrac{tan(x)}{x} = \dfrac{sin(x)}{x}\dfrac{1}{cos(x)}$. D'après les deux limites précédentes, l'on obtient $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

6. Soit $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ alors :
$\dfrac{1}{1+cos(x)}\left(\dfrac{sin(x)}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{1+cos(x)}\dfrac{sin^2(x)}{x^2} = \dfrac{1}{1+cos(x)}\dfrac{1-cos^2(x)}{x^2}$
$= \dfrac{1}{1+cos(x)}\dfrac{(1-cos(x))(1+cos(x))}{x^2} = \dfrac{1-cos(x)}{x^2}$

7. - Comme $\lim\limits_{x \mapsto 0} \cos(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} 1 = 1$ alors $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1-cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
   - Comme $\dfrac{1-\cos(x)}{x} = x\dfrac{1}{1+cos(x)}\left(\dfrac{sin(x)}{x}\right)^2$ alors $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$

En résumé les 4 limites de base et les 6 qui s'en déduisent à connaître ♡ ♡ ♡ :

- ◇
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$
d'où
  - ⋆
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{sin(ax)}{ax} = 1$$
lorsque $a \neq 0$
  - ⋆
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$
lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$
  - ⋆
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{sin(ax)}{sin(bx)} = \frac{a}{b}$$
lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$
- ◇
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$$
d'où
  - ⋆
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{tan(ax)}{ax} = 1$$
lorsque $a \neq 0$
  - ⋆
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$
lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$
  - ⋆
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{tan(ax)}{tan(bx)} = \frac{a}{b}$$
lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$
- ◇
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{1 - cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
- ◇
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Remarque : Obtention de 3 de ces limites par une autre méthode

1. **En utilisant la dérivation** :
   - En admettant que *sin* est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable en 0 alors
   $$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)-sin(0)}{x-0}=(sin)'(0)=cos(0)=1$$
   - En admettant que *cos* est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable en 0 alors
   $$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-cos(0)}{x-0}=(cos)'(0)=-sin(0)=0$$
   - En admettant que *tan* est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ tels que } k\in\mathbb{Z}\right\}$ donc dérivable en 0 alors
   $$\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)-tan(0)}{x-0}=(tan)'(0)=\frac{1}{cos^2(0)}=1$$
2. **En utilisant les formules de trigonométrie :**
   Comme
   $$cos(2\theta)=cos^2(\theta)-sin^2(\theta)=2cos^2(\theta)-1=1-2sin^2(\theta)$$
   alors
   $$cos(2\theta)=1-2sin^2(\theta)$$
   donc
   $$cos(\theta)=1-2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
   $$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left[\frac{x}{2}\right]^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\left[\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2=-\frac{1}{2}$$

4.7.2 Pour s'entraîner : Calcul de limites

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sin(x)$
2. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} cos(x)$
3. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{sin(x)}{x}$
4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x + sin(x)$
5. $\lim\limits_{x \mapsto 0} x\ sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
6. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 - cos(x)$
7. $\lim\limits_{x \mapsto 0} x^2(sin(x) + cos(x))$
8. $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{2}} \dfrac{cotan(x)}{x - \dfrac{\pi}{2}}$
9. $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\ cos(x) - sin(x)}{x - \dfrac{\pi}{3}}$
10. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\tan(x) - sin(x)}{x^3}$
11. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sin^2(x)}{1 - cos(x)}$
12. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sin(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}}$
13. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1 - cos(x)}{sin^2(5x)}$
14. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{x\ sin(x)}{1 - cos(x)}$
15. $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{6}} \dfrac{sin(6x)}{2\ cos(x) - \sqrt{3}}$

Corrigé

1. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sin(x)$ n'existe pas car $sin(x)$ oscille entre -1 et 1
2. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} cos(x)$ n'existe pas car $cos(x)$ oscille entre -1 et 1
3. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$?
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
   - Comme il existe au moins un intervalle du type $]A; +\infty[$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$
   - $-1 \leq sin(x) \leq x$
   - donc si $x > 0$ alors $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

- D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite,
  comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
  alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{sin(x)}{x} = 0$

4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x + sin(x)$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Comme il existe au moins un intervalle du type $]A; +\infty[$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$
   - $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 1$
     Or $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x - 1 = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x + sin(x) = +\infty$

5. $\lim\limits_{x \mapsto 0} x \ sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
   - Comme il existe au moins un intervalle épointé de centre 0 inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$
   - Si $x > 0$ comme $-1 \leq sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ alors $-x \leq x \ sin(\dfrac{1}{x}) \leq x$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} -x = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x = 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x \ sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
   - Si $x < 0$ comme $-1 \leq sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ alors $-x \geq x \ sin(\dfrac{1}{x}) \geq x$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} -x = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} x = 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} x \ sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
   - Comme $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} x \ sin(\dfrac{1}{x}) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x \ sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto 0} x \ sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

6. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 - cos(x)$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Comme il existe au moins un intervalle du type $]-\infty; B[$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x)$
   - Comme $-1 \leq cos(x) \leq 1$ alors $1 \geq -cos(x) \geq -1$ donc $-1 \leq -cos(x) \leq 1$ d'où $x^2 - 1 \leq x^2 - cos(x) \leq x^2 + 1$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 - 1 = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 - cos(x) = +\infty$

7. $\lim\limits_{x \mapsto 0} x^2(sin(x) + cos(x))$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Comme il existe au moins un intervalle épointé de centre 0 inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$
   - Comme $-1 \leq sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq cos(x) \leq 1$ alors $-2 \leq sin(x) + cos(x) \leq 2$
   - Or $x^2 \geq 0$ donc $-2x^2 \leq x^2(sin(x) + cos(x)) \leq 2x^2$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x \mapsto 0} -2x^2 = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto 0} 2x^2 = 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto 0} x^2(sin(x) + cos(x)) = 0$

8. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{2}} \dfrac{cotan(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

9. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\ cos(x)-sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$

10. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{tan(x)-sin(x)}{x^3}$

11. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{sin^2(x)}{1-cos(x)}$

12. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{sin(2x)}{\sqrt{1-cos(x)}}$

13. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{1-cos(x)}{sin^2(5x)}$
    - L'ensemble de définition est
      $\mathcal{D}_f=\{x\ /\ sin^2(5x)\neq 0\}=\{x\ /\ sin(5x)\neq 0\}$
      Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{k\pi}{5}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
      car $sin(5x)=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}\quad 5x=k\pi \iff \exists k\in\mathbb{Z}\quad x=\dfrac{k\pi}{5}$
    - Comme il existe au moins un intervalle de centre 0 inclus dans $\mathcal{D}_{\{}$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)$
    - Par la méthode directe, il y a indétermination du type "$\dfrac{0}{0}$" car $\lim\limits_{x\mapsto 0} 1-\cos(x)=0$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0} sin^2(5x)=0$
    - Levons cette indétermination :
      $$f(x)=\frac{1-cos(x)}{sin^2(5x)}=\frac{\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}x^2}{\left(\dfrac{\sin(5x)}{5x}\right)^2 25x^2}$$
      Or $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{x^2}{25x^2}=\dfrac{1}{25}$; $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$
      donc $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=\dfrac{1}{50}$

14. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(6x)}{2\ \cos(x)-\sqrt{3}}$
    - L'ensemble de définition est :
      $\mathcal{D}_f=\{x\ /2\cos(x)-\sqrt{3}\neq 0\}=\{x\ /\ \cos(x)\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$
      Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
      car $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x)=\dfrac{\pi}{6} \iff \exists k\in\mathbb{Z}\quad x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$
    - Comme il existe au moins un intervalle de centre $\dfrac{\pi}{6}$ inclus dans $\mathcal{D}_{\{}$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{6}} f(x)$

- Par la méthode directe, il y a indétermination du type "$\dfrac{0}{0}$" car $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{6}} \sin(6x) = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{6}} 2\ \cos(x) - \sqrt{3} = 0$
- Levons cette indétermination :

Posons $h = x - \dfrac{\pi}{6}$ alors

$$\frac{\sin(6x)}{2\ \cos(x)-\sqrt{3}} = \frac{\sin(6(h+\frac{\pi}{6})}{2\ \cos(h+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}} = \frac{\sin(6h+\pi)}{2\left[\cos(h)\cos(\frac{\pi}{6})-\sin(h)\sin(\frac{\pi}{6}\right]-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sin(6h+\pi)}{\sqrt{3}\cos(h)-\sin(h)-\sqrt{3}} = \frac{-\sin(6h)}{\sqrt{3}(\cos(h)-1)-\sin(h)}$$

$$= \frac{6\ \dfrac{-\sin(6h)}{6h}}{\dfrac{\sqrt{3}(\cos(h)-1)}{h}-\dfrac{\sin(h)}{h}}$$

Donc $\displaystyle \lim_{x\mapsto \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(6x)}{2\ \cos(x)-\sqrt{3}} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{6\ \dfrac{-\sin(6h)}{6h}}{\dfrac{\sqrt{3}(\cos(h)-1)}{h}-\dfrac{\sin(h)}{h}} = 6$

car $\displaystyle \lim_{h\mapsto 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0} \frac{\sin(6h)}{6h} = 1 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$

4.7.3 Autre démonstration de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$

1. Démontrer que $\forall x \geq 0 \quad sin(x) \leq x$.
2. Démontrer que $\forall x \geq 0 \quad cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
3. Démontrer que $\forall x \geq 0 \quad x - \dfrac{x^3}{6} \leq sin(x) \leq x$.
4. En déduire un encadrement de $sin(x)$ pour $x \geq 0$.
5. Déduire du 3°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sin(x)}{x}$
6. Déduire du 4°) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{sin(x)}{x}$
7. En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$
8. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x = 0 \\ \dfrac{sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$

   est continue sur $\mathbb{R}$.

4.7.4 Une fonction spéciale

Etudier la continuité puis la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction suivante f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x = 0 \\ x^2 \; sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

4.7.5 Prolongement par continuité

Pouvez-vous prolonger par continuité en 0 la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x}{sin(x)}$$

- $\dfrac{2x}{sin(x)}$ existe à condition que $2x$ existe et $sin(x)$ existe et $sin(x) \neq 0$, c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad x \neq k\pi$
  car $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \quad 2x \text{ existe} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad sin(x) \text{ existe} \\ sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi \end{array} \right.$
- Par conséquent, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

f est continue sur $\mathcal{D}_f$ car
- $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_f$
- $x \mapsto sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_f$
- $x \mapsto sin(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathcal{D}_f$

Or on sait que $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{2x}{sin(x)} = 2$
On peut donc créer g prolongement par continuité de f en 0 en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0) = 2 \\ g(x) = f(x) \text{si } x \in \mathcal{D}_f \end{array} \right.$$

4.8 Applications trigonométriques de la Formule de Moivre et du binôme de Newton

4.8.1 Formules de multiplication des arcs

Exprimer en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ les nombres réels suivants :

$$\cos(2\theta); \sin(2\theta), \cos(3\theta); \sin(3\theta); \cos(4\theta); \sin(4\theta)$$

Résolution de l'équation $3x - 4x^3 = 1$

Le but est de résoudre cette équation par 2 méthodes dont l'une est trigonométrique

1. Méthode 1 :
   (a) Déterminer une solution évidente de cette équation.
   (b) Résoudre alors cette équation
2. Méthode 2 :
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $cos(3a)$ en fonction de $cos(a)$
   (b) Résoudre alors l'équation $3x - 4x^3 = 1$

L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

1. Méthode 1 :
   (a) Une solution évidente de cette équation est $x = -1$.
   (b) $3x - 4x^3 = 1 \iff 4x^3 - 3x + 1 = 0 \iff (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = 0 \iff (x+1)(2x-1)^2 = 0$
   $\iff x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$ (solution double)
   (c) Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right\}}$
2. Méthode 2 :
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$.
   $cos(3a) = cos(2a+a) = cos(2a)\ cos(a) - sin(2a)\ sin(a) = (2cos^2(a) - 1)cos(a) - 2sin(a)\ cos(a)\ sin(a)$
   $cos(3a) = 2\ cos^3(a) - cos(a) - 2\ sin^2(a)\ cos(a) = 2\ cos^3(a) - cos(a) - 2(1 - cos^2(a))\ cos(a)$
   $\boxed{cos(3a) = 4\ cos^3(a) - 3\ cos(a)}$
   (b) $3x - 4x^3 = 1 \iff \begin{cases} x = cos(a) \\ 3\ cos(a) - 4\ cos^3(a) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = cos(a) \\ cos(3a) = -1 \end{cases}$
   Or $cos(3a) = 1 \iff cos(3a) = cos(\pi) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 3a = \pi + 2k\pi$
   $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \iff a = \dfrac{\pi}{3}$ ou $a = \pi$ ou $a = -\dfrac{\pi}{3}$
   en donnant à k les 3 valeurs $k = 0\ ;\ k = 1\ ;\ k = 2$
   Par conséquent,
   $x = cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ ou $x = cos\left(\pi\right) = -1$ ou $x = cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.
   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right\}}$

Résolution de l'équation de Francois VIETE

François VIETE (1540 - 1603) sur la demande d'Henri IV roi de France, répondit en un jour au défi suivant du mathématicien néerlandais Adrien ROMAIN à savoir résoudre l'équation suivante : $45\ x - 3795\ x^3 + 95634\ x^5 - 1138500\ x^7 + 7811375\ x^9 - 34512075\ x^{11} + 105306075\ x^{13} - 232676280\ x^{15} + 384942375\ x^{17} - 488494125\ x^{19} + 4838418000\ x^{21} - 3786588000\ x^{23} + 236030652\ x^{25} - 17679100\ x^{27} + 46955700\ x^{29} - 14945040\ x^{31} + 3764565\ x^{33} - 740259\ x^{35} + 111150\ x^{37} - 12300\ x^{39} + 945\ x^{41} - 45\ x^{43} + x^{45} = 1$
(Source : "Degré 45 : François Viète relève le défi !" - article d'André DELEDICQ - Tangente n° 193 - Avril Mai 2020)

VIETE l'a résolu en pensant à la trigonométrie :
En posant $x = cos(t)$, cette équation se ramène à la résolution de

$$cos(45t) = 1$$

Par conséquent, l'ensemble des 45 solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ cos\left(\frac{2k\pi}{45}\right)\ /\ k \in [|0; 44|] \right\}}$$

4.8.2 Linéarisation de polynômes trigonométriques

Linéariser (c'est-à-dire transformer les polynômes suivants en une combinaison linéaire de cosinus et de sinus de multiples de θ :

$\cos^2(\theta); \sin^2(\theta); \cos^3(\theta); \sin^3(\theta); \cos^4(\theta); \sin^4(\theta); \cos^5(\theta); \sin^5(\theta); sin^3(\theta)cos^4(\theta)$

4.9 Intégration et trigonométrie

4.9.1 Exercice - Bac Rennes C 77

Soit $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)} dx$; $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin(x)} dx$ et $I_2 = I_1 + I$

1. Calculer I_2
2. Calculer I_1
3. En déduire I

4.9.2 Intégration et trigonométrie

On pose $I(x) = \int_0^x \cos^2(t)\ dt$; $J(x) = \int_0^x \sin^2(t)\ dt$

1. Calculer $I(x) + J(x)$
2. Calculer $I(x) - J(x)$
3. En déduire la valeur de $I(x)$ puis celle de $J(x)$

Corrigé

$I(x)$ existe car la fonction $t \mapsto \cos^2(t)$ est continue sur l'intervalle de bornes 0 et x car elle est continue sur $\mathbb{R}$
$J(x)$ existe car la fonction $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur l'intervalle de bornes 0 et x car elle est continue sur $\mathbb{R}$

1. $I(x) + J(x) = \int_0^x \cos^2(t)\ dt + \int_0^x \sin^2(t)\ dt = \int_0^x (\cos^2(t) + \sin^2(t))\ dt = \int_0^x 1\ dt = [t]_0^x = x$
2. $I(x) - J(x) = \int_0^x \cos^2(t)\ dt - \int_0^x \sin^2(t)\ dt = \int_0^x (\cos^2(t) - \sin^2(t))\ dt$
   $= \int_0^x \cos(2t)\ dt = [\frac{1}{2}\sin(2t)]_0^x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
3. Comme $I(x) + J(x) = x$ et que $I(x) - J(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ alors
   - ⋄ $I(x) = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right] = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$
   - ⋄ $J(x) = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$

4.10 La trigonométrie et $\mathbb{C}$

4.10.1 Exercice

Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}$

4.10.2 Exercice

Soit θ un réel tel que $\forall k \in \mathbb{Z}\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
Déterminer, en fonction de θ , le module et un argument de

1. $z_1 = \dfrac{1}{1 + i\tan(\theta)}$
2. $z_2 = \dfrac{1}{1 - i\tan(\theta)}$
3. $z_3 = \dfrac{1}{i + \tan(\theta)}$

4.10.3 Exercice

Soient a et b des réels.

1. Démontrer que $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\ 2\ cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
2. Démontrer que $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\ 2\ i\ sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
3. En déduire que $\dfrac{e^{ia}+e^{ib}}{e^{ia}-e^{ib}} = -i\ cotan\left(\frac{a-b}{2}\right)$
4. En déduire que $\dfrac{e^{ia}-e^{ib}}{e^{ia}+e^{ib}} = i\ tan\left(\frac{a-b}{2}\right)$
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^k = 0$$

4.10.4 Exercice

Pour tout entier $n \geq 2$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1. Posons $z = cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

   Donner une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$

2. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme.
   En déduire l'égalité
   $$S_n = \frac{1}{tan\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

3. Déterminer $\lim_{nleft+\infty} \frac{S_n}{n}$?

4.10.5 Exercice

Le plan complexe P est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
Soient les points A d'affixe a $\neq$ b, B d'affixe b et M d'affixe z.
Soit le nombre complexe $z' = \dfrac{z-a}{z-b}$
1°) Donner une interprétation géométrique de $\mid z' \mid$ et de arg(z').
2°) Déterminer puis construire les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{M \in P \text{ tels que } \mid z' \mid = 1\}$
2. $E_2 = \{M \in P \text{ tels que } \mid z' \mid = k\}$ où $k > 0$ et $k \neq 1$
3. $E_3 = \{M \in P \text{ tels que } z' \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{M \in P \text{ tels que } z' \in \mathbb{R}^+\}$
5. $E_5 = \{M \in P \text{ tels que } z' \in i\mathbb{R}\}$

4.10.6 Exercice (Bac S Antilles-Guyane)

On considère dans le plan complexe, les points O d'affixe 0, A d'affixe 1 et B d'affixe -1.
A tout point M d'affixe $z \neq 1$, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$
1°) Etablir que $\mid z' \mid = 1$
2°) Etablir que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
3°) Etablir que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
4°) Interpréter géométriquement à l'aide des points M, M', O, A et B les 3 propriétés établies précédemment.
5°) Donner une construction géométrique de M' connaissant M.

4.10.7 Nantes C 83

1. Déterminer les racines cinquièmes complexes de 1.
2. Démontrer que la somme S des solutions est nulle.
3. En décomposant S selon sa partie réelle et sa partie imaginaire et en remarquant que $cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et que $cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ démontrer que $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1}{2}$
4. Utiliser le fait que $cos(2\theta) = 2cos(\theta)^2 - 1$ pour obtenir une équation du second degré que vérifie $cos(\frac{2\pi}{5})$.
   En déduire que $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et que $cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
5. Détaillez alors une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier convexe.

Corrigé

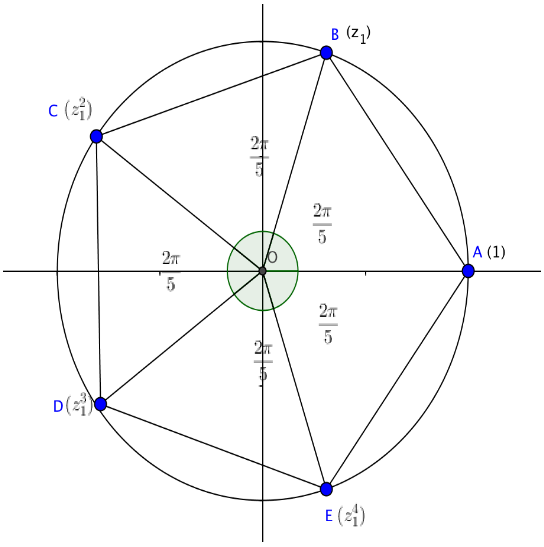
1. Soit l'équation $z^5 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   - L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.
   - $z = 0 \notin \mathcal{S}$.
   - On cherche donc des solutions z dans $\mathbb{C}^*$. Posons alors $z = r\ e^{i\theta}$.
     $z^5 = 1 \iff (r\ e^{i\theta})^5 = 1 \iff r^5\ e^{5i\theta} = 1\ e^{i0} \iff \left\{\begin{array}{l} r^5 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad 5\theta = 0 + 2k\pi \end{array}\right.$
     $\iff \left\{\begin{array}{l} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \dfrac{2k\pi}{5} \end{array}\right.$
   - Les solutions s'obtiennent en donnant à k cinq valeurs entières consécutives $0, 1, 2, 3, 4$

$$\mathcal{S} = \left\{ 1\ e^{i\frac{2(0)\pi}{5}} \ ;\ 1\ e^{i\frac{2(1)\pi}{5}} \ ;\ 1\ e^{i\frac{2(2)\pi}{5}} \ ;\ 1\ e^{i\frac{2(3)\pi}{5}} \ ;\ 1\ e^{i\frac{2(4)\pi}{5}} \right\}$$

En posant $\boxed{z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}}$ alors $\left\{\begin{array}{l} 1e^{i\frac{2(0)\pi}{5}} = e^{i0} = 1 = z_1^0 \\ e^{i\frac{2(1)\pi}{5}} = z_1 \\ e^{i\frac{2(2)\pi}{5}} = z_1^2 \\ e^{i\frac{2(3)\pi}{5}} = z_1^3 \\ e^{i\frac{2(4)\pi}{5}} = z_1^4 \end{array}\right.$

donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{1; z_1; z_1^2; z_1^3; z_1^4\right\}}$

.



2. En posant $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$
   $S = 1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = 1\ \dfrac{1-z_1^5}{1-z_1} = \dfrac{1-1}{1-z_1} = 0$
   en utilisant la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
3. $0 = S = cos(0) + i\ sin(0) + cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\ sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + i\ sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + i\ sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) + i\ sin\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$
   d'où $0 = \mathcal{R}e(S) = cos(0) + cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$
   Or $cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ et $cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$
   donc $0 = 1 + 2\ cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\ cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ d'où $-1 = 2\left[\ cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) +\ cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right]$
   Par conséquent, $\boxed{cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1}{2}}$
4. Comme $cos(2\theta) = 2cos(\theta)^2 - 1$ alors
   $\dfrac{-1}{2} = cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\ cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) - 1$
   On constate alors que $cos(\dfrac{2\pi}{5})$ vérifie l' équation du second degré : $2X^2 + X - \dfrac{1}{2} = 0$ $\Delta = (1)^2 - 4(2)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 + 4 = 5$
   $2X^2 + X - \dfrac{1}{2} = 0$ a donc pour solutions $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$ Or $cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) < 0$ donc $\boxed{cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

et que $\boxed{cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$

5. Détaillez alors une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier convexe.

4.10.8 Exercice

Dans le plan complexe, soient les points A, B et C d'affixes respectives a,b et c.
Démontrer l'équivalence logique suivante :
ABC est équilatéral $\Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$

4.10.9 Exercice (Bac S Antilles-Guyane)

Soit le nombre complexe $A = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$
1°) Démontrer que $A^2 = -2\sqrt{3} - 2i$
2°)Déterminer alors le module et un argument de A^2.
3°) En déduire le module de A et vérifier qu'un argument de A est bien $\dfrac{19\pi}{12}$ et non $\dfrac{7\pi}{12}$.
4°) Représenter alors sur un même graphique $A, -A$ et A^2.
5°) Déduire de ce qui précède que :
$\cos(\dfrac{7\pi}{12}) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et que $\sin(\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
6°) Déterminer les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et de $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.
7°) Déterminer puis dessiner l'ensemble (D) des nombres complexes z tels que A^2z soit un nombre réel.

4.10.10 Exercice

Soit $z = \cos^2(\phi) + i \sin(\phi) \cos(\phi)$

1. Déterminer toutes les valeurs de ϕ telles que $z = 0$.
2. Ces valeurs de Φ étant exclues,
   (a) Ecrire alors z^{-1} sous forme cartésienne.
   (b) Ecrire sous forme cartésienne z^2, z^3, z^{-2}, z^{-3}
   (c) Retrouver les résultats des 2 questions précédentes en utilisant la forme trigonométrique de z

4.10.11 Exercice

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z

1. $z^2 - (3\cos(\theta) + i\sin(\theta)z + 2 = 0$
2. $z^6 - z^3 + 1 + i = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique.
3. $\cos(2\alpha)z^2 - 2i(\cos(\alpha)z - 1 + 0$.
   On appelera z_1 et z_2 les solutions. Après avoir déterminé z_1 et z_2 on cherchera une CNS sur α pour que $M_1M_2 = 2$ sachant que M_1 et M_2 ont pour affixes respectives z_1 et z_2

4.11 Etude de fonctions trigonométriques

4.11.1

4.11.2

4.11.3

4.11.4