Corrigé des exercices de trigonométrie

Christian CYRILLE

2 juin 2018

"L'angle droit bout à 90° "
Un élève anonyme

1 Expressions trigonométriques

1.1 Exercice

Simplifier les expressions suivantes :

1. $cos(\pi - x) - cos(-x)$
2. $sin(\pi + x) + cos(\frac{\pi}{2} - x)$
3. $sin(\pi - x) + cos(x + \frac{\pi}{2})$
4. $cos(\pi - x) + sin(x + 3\pi)$
5. $sin(x - 3\pi) + sin(x + 3\pi)$
6. $cos(\frac{5\pi}{2} + x)$
7. $(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\sin(x) - \cos(x))^2$
8. $\cos(x) + \cos(\pi + x) + cos(2\pi + x) + cos(3\pi + x)$
9. $\cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(3\frac{\pi}{8}) + cos(5\frac{\pi}{8}) + cos(7\frac{\pi}{8})$
10. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \pi) + \sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(x + 2\pi)$
11. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{7\pi}{2})$
12. $\sin(x + \pi) + \cos(\pi - x) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 7\pi)$
13. $\cos^3(x) + \cos^2(x)\sin(x) + \cos(x)\sin^2(x) + \sin^3(x)$

1.1.1 Corrigé

Simplifier les expressions suivantes :

1. $cos(\pi - x) - cos(-x) = -cos(x) - cos(x) = \boxed{-2\,cos(x)}$
2. $sin(\pi + x) + cos(\frac{\pi}{2} - x) = -sin(x) + sin(x) = \boxed{0}$

3. $sin(\pi - x) + cos(x + \frac{\pi}{2}) = sin(x) - sin(x) = \boxed{0}$
4. $cos(\pi - x) + sin(x + 3\pi) = -cos(x) + sin(x + \pi + 2\pi) = -cos(x) + sin(x + \pi)$
$= \boxed{-cos(x) - sin(x)}$
5. $sin(x - 3\pi) + sin(x + 3\pi) = sin(x - \pi - 2\pi) + sin(x + \pi + 2\pi)$
$= sin(x - \pi) + sin(x + \pi) = -sin(\pi - x) + sin(x + \pi) = -sin(x) - sin(x) = \boxed{-2\, sin(x)}$
6. $cos(\frac{5\pi}{2} + x) = cos(2\pi + \frac{\pi}{2} + x) = cos(\frac{\pi}{2} + x) = \boxed{-sin(x)}$
7. $(sin(x) + cos(x))^2 + (sin(x) - cos(x))^2$
$= sin^2(x) + 2\, sin(x)\, cos(x) + cos^2(x) + sin^2(x) - 2\, sin(x)\, cos(x) + cos^2(x)$
$= 2(sin^2(x) + cos^2(x)) = \boxed{2}$
8. $cos(x) + cos(\pi + x) + cos(2\pi + x) + cos(3\pi + x)$
$= cos(x) + cos(\pi + x) + cos(+x) + cos(\pi + x) = 2cos(x) + 2cos(\pi + x)$
$= 2cos(x) - 2cos(x) = \boxed{0}$
9. $cos(\frac{\pi}{8}) + cos(\frac{3\pi}{8}) + cos(\frac{5\pi}{8}) + cos(\frac{7\pi}{8})$
$= cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(\pi - \frac{5\pi}{8}) + cos(\frac{5\pi}{8}) + cos(\pi - \frac{\pi}{8})$
$= cos(\frac{\pi}{8}) - \cos(\frac{5\pi}{8}) + cos(\frac{5\pi}{8}) - cos(\frac{\pi}{8}) = \boxed{0}$
10. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \pi) + \sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(x + 2\pi)$
$= \cos(x) + \sin(x) + \sin(x + \frac{3\pi}{2} - 2\pi) + \sin(x)$
$= \cos(x) + \sin(x) + \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x) = \cos(x) + \sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(x)$
$= \cos(x) + \sin(x) - \cos(x) + \sin(x) = \boxed{2\sin(x)}$
11. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{7\pi}{2})$
$\sin(x) - \cos(x) + \cos(\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x) - \sin(x - \frac{7\pi}{2} + \frac{8\pi}{2})$
$= \sin(x) - \cos(x) + \cos(4\pi - \frac{\pi}{2} - x) - \sin(x - \frac{7\pi}{2} + 4\pi)$
$= \sin(x) - \cos(x) + \cos(-\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x - \frac{\pi}{2})$
$= \sin(x) - \cos(x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
$= \sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(x) = \boxed{0}$
12. $\sin(x + \pi) + \cos(\pi - x) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 7\pi)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(x - \pi + 8\pi)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(x - \pi)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(\pi - x)$
$= -\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = \boxed{-2\sin(x) - 2\cos(x)}$
13. $\cos^3(x) + \cos^2(x)\sin(x) + \cos(x)\sin^2(x) + \sin^3(x)$
$= \cos^3(x) + \cos(x)\sin^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) + + \sin^3(x)$
$= \cos(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) + \sin(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)$
$= (\cos(x) + \sin(x))\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)$
$= \boxed{\cos(x) + \sin(x)}$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

2 Equations trigonométriques

2.1 Exercice

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x et où a est un paramètre réel.

1. $cos(x) = a$
2. $sin(x) = a$
3. $tan(x) = a$

2.1.1 Corrigé

1. - si $a \notin [-1;1]$ alors $cos(x) = a$ n'a pas de solution.
   - si $a \in [-1;1]$ il existe une seule valeur $x_0 \in [0;\pi]$ telle que $cos(x_0) = a$ c'est $x_0 = Arccos(a)$
     Alors $cos(x) = a \iff cos(x) = cos(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$
2. - si $a \notin [-1;1]$ alors $sin(x) = a$ n'a pas de solution.
   - si $a \in [-1;1]$ il existe une seule valeur $x_0 \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ telle que $sin(x_0) = a$ c'est $x_0 = Arcsin(a)$
     Alors $sin(x) = a \iff sin(x) = sin(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - x_0 + 2k\pi$
3. il existe une seule valeur $x_0 \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ telle que $tan(x_0) = a$ c'est $x_0 = Arctan(a)$
   Alors $tan(x) = a \iff tan(x) = tan(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi + x_0 + 2k\pi$

2.2 Exercice

Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x.

1. (a) $cos(x) = 1$
   (b) $cos(x) = 0$
   (c) $cos(x) = \frac{1}{2}$
   (d) $cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. (a) $sin(x) = 1$
   (b) $sin(x) = 0$
   (c) $sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   (d) $sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. (a) $tan(x) = 1$
   (b) $tan(x) = 0$
   (c) $tan(x) = \sqrt{3}$
   (d) $tan(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.2.1 Corrigé

Toutes les équations suivantes ont pour ensemble de définition : $\mathbb{R}$:

1. (a) $cos(x) = 1 \iff cos(x) = cos(0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 0 + 2k\pi$ ou $x = -0 + 2k\pi$ donc $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
   (b) $cos(x) = 0 \iff cos(x) = cos(\frac{\pi}{2}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
   Or $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi$ donc $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (c) $cos(x) = \frac{1}{2} \iff cos(x) = cos(\frac{\pi}{3}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
   donc $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (d) $cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff cos(2x) = cos(\frac{\pi}{6}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$
   donc $S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi ; -\frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. (a) $sin(x) = 1 \iff sin(x) = sin(\frac{\pi}{2}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
   donc $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $sin(x) = 0 \iff sin(x) = sin(0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - 0 + 2k\pi = (2k+1)/pi$
donc $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff sin(x) = sin(\dfrac{\pi}{4}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$
donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi; \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff sin(2x) = sin(\dfrac{\pi}{3}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{6} + k\pi$
donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi; \dfrac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. (a) $tan(x) = 1 \iff tan(x) = tan(\dfrac{\pi}{4}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$
donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $tan(x) = 0 \iff tan(x) = tan(0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 0 + 2k\pi$ ou $x = \pi + 0 + 2k\pi = (2k+1)\pi$
donc $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $tan(x) = \sqrt{3} \iff tan(x) = tan(\dfrac{\pi}{3}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$
donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi; \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $tan(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \iff tan(2x) = tan(\dfrac{\pi}{6}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$
donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2.3 Exercice

$tan(a+b) = \dfrac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)tan(b)}$.
Les 4 conditions d'existence sur a et b de cette formule sont :

1. $tan(a+b)$ existe c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
2. $tan(a)$ existe c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
3. $tan(b)$ existe c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
4. $1 - tan(a)tan(b) \neq 0$

Démontrer que les 3 premières conditions suffisent car elles entraînent automatiquement la 4-ième.

2.3.1 Corrigé

En effet,

- ou bien $tan(b) \neq 0$ c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}\ b \neq k\pi$
  Alors $1 - tan(a)tan(b) = 0 \iff tan(a) = \dfrac{1}{tan(b)} \iff tan(a) = cotan(b) \iff tan(a) = tan(\dfrac{\pi}{2} - b) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \dfrac{\pi}{2} - b + 2k\pi$ ou $a = \pi + \dfrac{\pi}{2} - b + 2k\pi \iff a + b = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
  Or ceci n'est pas possible à cause de la condition 1.
- ou bien $tan(b) = 0$ c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{Z}\ b = k\pi$ mais alors $1 - tan(a)tan(b) = 1 \neq 0$

2.4 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$2\cos^2(x) - \sin(5x) - 1 = 0$$

2.4.1 Corrigé

$2\cos^2(x) - \sin(5x) - 1 = 0$

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathcal{D} \quad 2\cos^2(x) - \sin(5x) - 1 = 0 \iff 2\cos^2(x) - 1 = \sin(5x)$
  $\iff \cos(2x) = \sin(5x) \iff \cos(2x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} - 5x)$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2x = \dfrac{\pi}{2} - 5x + 2k\pi \quad$ ou $\quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 5x + 2k\pi$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 7x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad$ ou $\quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad -3x = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{7}$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{14} + 2k\pi \quad$ ou $\quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2k\pi}{3}$
- Alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \quad \left\{ \dfrac{\pi}{14} + 2k\pi \quad ; \quad \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2k\pi}{3} \right\}$

2.5 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante (E) d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

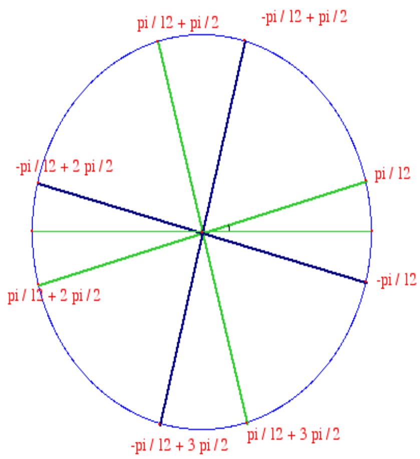
$$(E) : 4\sin(x)\sin(3x) - 2\cos(2x) + 1 = 0$$

2.5.1 Corrigé

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathcal{D}$
  $4\sin(x)\sin(3x) - 2\cos(2x) + 1 = 0$
  $\iff 4\left[\frac{1}{2}\left(\cos(x-3x) - cos(x+3x)\right)\right] - 2\cos(2x) + 1 = 0$
  car $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - cos(a+b)))$
  Donc $(E) \iff 2(\cos(-2x) - \cos(4x)) - 2\cos(2x) + 1 = 0 \iff 2\cos(2x) - 2\cos(4x) - 2\cos(2x) + 1 = 0$
  $\iff -2\cos(4x) + 1 = 0 \iff \cos(4x) = \frac{1}{2} \iff \cos(4x) = \cos(\frac{\pi}{3})$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ \\ \text{ou } x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$
- Alors l'ensemble des solutions est :

  $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad / \quad k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \quad \{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\}$

  Ces solutions sont représentées par les points suivants sur le cercle trigonométrique :



2.6 Bac C Paris

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique : (E) : $\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 0$

2.6.1 Corrigé

1. $Def = \{x \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} sin(x) \geq 0 \\ \\ cos(x) \geq 0 \end{array} \right. \} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + 2k\pi \; ; \; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
2. Comme la somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si ces deux réels sont nuls alors :

   Alors $\sqrt{sin(x)} + \sqrt{cos(x)} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} sin(x) = 0 \\ \\ cos(x) = 0 \end{array} \right.$

   Or ce système n'a pas de solutions car $\forall x \in \mathbb{R} \qquad sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
3. On en conclut que l'ensemble des solutions $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

2.7 Bac C Paris (suite)

> Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique : (E) : $\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1$

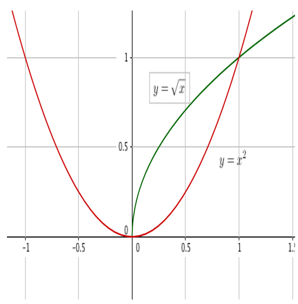
2.7.1 Version 1 : Catherine FILIOLE, TC Lycée Schoelcher

$\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1$

- $Def = \{x \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} sin(x) \geq 0 \\ \\ cos(x) \geq 0 \end{array}\right. \} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + 2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- $2k\pi \in \mathcal{S}$ car $\sqrt{\sin(2k\pi)} + \sqrt{\cos(2k\pi)} = 0 + 1 = 1$
- $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \mathcal{S}$ car $\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} + \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = 1 + 0 = 1$
- Par conséquent, $\{2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\} \subset \mathcal{S}$
- Ce sont les seules solutions car si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\left\{\begin{array}{l} 0 < \sin(x) < 1 \\ 0 < \cos(x) < 1 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\sin(x)} > \sin^2(x) \\ \sqrt{\cos(x)} > \cos^2(x) \end{array}\right.$

  donc $\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} > 1$
- On en conclut que l'ensemble des solutions $\boxed{\mathcal{S} = \{2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}}$

L'idée de Catherine FILIOLE est basé sur le résultat suivant : Si $0 < X < 1$ alors $\sqrt{X} < X^2$ ce qui s'illustre aisément :



2.7.2 Version 2

Toujours sur cette même idée :

$\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1 \iff \sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

$\iff \sqrt{\sin(x)} - \sin^2(x) + \sqrt{\cos(x)} - \cos^2(x) = 0$

$\iff \sqrt{X} - X^2 + \sqrt{Y} - Y^2 = 0$ en posant $X = \sin(x)$ et $Y = \cos(x)$

$\iff \sqrt{X} - X^2 = \sqrt{Y} - Y^2 = 0$ puisque $\sqrt{X} - X^2 \geq 0$ et $\sqrt{Y} - Y^2 \geq 0$ car $0 \leq X \leq 1$ et $0 \leq Y \leq 1$

Donc $(E) \iff \sqrt{X} = X^2$ et $\sqrt{Y} = Y^2$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=0 \\ Y=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} X=0 \\ Y=1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} X=1 \\ Y=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} X=1 \\ Y=1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin(x)=0 \\ \cos(x)=0 \end{array}\right. \text{ impossible car } sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

$$\text{ou} \left\{\begin{array}{l} \sin(x)=0 \\ \cos(x)=1 \end{array}\right.$$

$$\text{ou} \left\{\begin{array}{l} \sin(x)=1 \\ \cos(x)=0 \end{array}\right.$$

$$\text{ou} \left\{\begin{array}{l} \sin(x)=1 \\ \cos(x)=1 \end{array}\right. \text{ impossible car } sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin(x)=0 \\ \cos(x)=1 \end{array}\right.$$

$$\text{ou} \left\{\begin{array}{l} \sin(x)=1 \\ \cos(x)=0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow x=2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

2.7.3 Version 3 : Sonia FILIOLE, TC Lycée Schoelcher

2.8 Equations de la forme $a\, cos(x) + b\, sin(x) = c$

1. Démontrer que pour tout réel x l'on a :

$$cos(x) + sin(x) = \sqrt{2}\, cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Quels sont les valeurs minimale et maximale de $cos(x) + sin(x)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(x) + \sin(x) = 2$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(x) + \sin(x) = 1$

2.8.1 Corrigé

1. Démontrons que pour tout réel x l'on a :

$$cos(x) + sin(x) = \sqrt{2}\, cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\, sin(x + \frac{\pi}{4})$$

2. On a $\left\{\begin{array}{l} -1 \leq cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq sin(x) \leq 1 \end{array}\right.$ donc $2 \leq cos(x) + sin(x) \leq 2$.
   Mais -2 et 2 ne sont pas les valeurs minimale et maximale de $cos(x) + sin(x)$.
   Les valeurs minimale et maximale sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ car
   $-1 \leq\ cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ donc $-\sqrt{2} \leq cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$
3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(x) + \sin(x) = 2$
   - Méthode 1 :
     $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $-2 \leq \cos(x) + \sin(x) \leq 2$
     Par conséquent $\cos(x) + \sin(x) = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = 1$ et $\sin(x) = 1$
     Donc $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 2$. Ceci est impossible car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
     Par conséquent , l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \emptyset$
   - Méthode 2 :
     $\cos(x) + \sin(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}} + \frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}) = 2$
     $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)) = 2$
     $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})\cos(x) + \sin(\frac{\pi}{4})\sin(x)) = 2$
     $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 2 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
     Cette équation est impossible à résoudre
     car $\sqrt{2} \approx 1,414$ et $-1 \leq \cos(X) \leq 1$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(x) + \sin(x) = 1$

3 Inéquations trigonométriques

3.1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)}$
2. $f(x) = \sqrt{1 - \sin(x)}$
3. $f(x) = \tan(x)$

3.1.1 Corrigé

1. $f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)}$ existe à condition que $\begin{cases} 1 + \cos(x) \text{ existe} \\ 1 + \cos(x) \geq 0 \end{cases}$
   - $1 + \cos(x)$ existe pour tout réel car $\cos(x)$ existe pour tout réel.
   - $1 + \cos(x) \geq 0$ est vrai pour tout réel car $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $0 \leq 1 + \cos(x) \leq 2$.
   - Par conséquent, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$
2. $f(x) = \sqrt{1 - \sin(x)}$ existe à condition que $\begin{cases} 1 - \sin(x) \text{ existe} \\ 1 - \sin(x) \geq 0 \end{cases}$
   - $1 - \sin(x)$ existe pour tout réel car $\sin(x)$ existe pour tout réel.
   - $1 - \sin(x) \geq 0$ est vrai pour tout réel :
     En effet, $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$
     donc $1 \geq -\sin(x) \geq -1$ d'où $-1 \leq -\sin(x) \leq 1$.
     On en déduit que $0 \leq 1 - \sin(x) \leq 2$.
   - Par conséquent, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$
3. $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ existe existe à condition que $\begin{cases} \sin(x) \text{ existe} \\ \cos(x) \text{ existe} \\ \cos(x) \geq 0 \end{cases}$
   - $\sin(x)$ existe pour tout réel.
   - $\cos(x)$ existe pour tout réel.
   - $\cos(x) = 0 \iff \cos(x) = \cos(\dfrac{\pi}{2})$

     $$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

     $$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
   - Par conséquent, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}}$

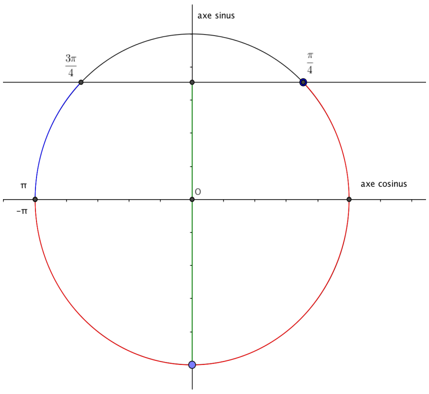
3.2 Inéquations

Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation suivantes d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(I) : \sqrt{2}\,sin(2x) - 1 < 0$$

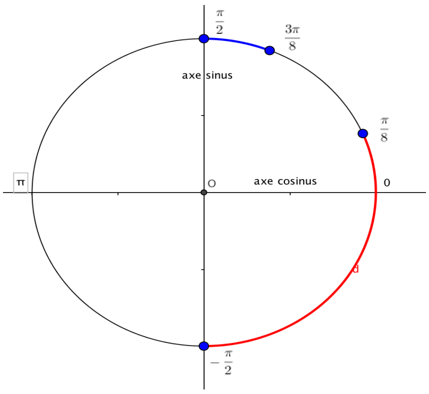
3.2.1 Corrigé

- L'ensemble de définition de cette inéquation est :$\mathcal{D} = [-\pi;\pi]$
- $\forall x \in \mathcal{D} \quad (I) \iff \sqrt{2}\,sin(2x) < 1 \iff sin(2x) < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff sin(2x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$$(I) \iff sin(2x) < sin(\frac{\pi}{4}) \iff \begin{cases} -\pi \leq 2x < \dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \dfrac{3\pi}{4} < 2x \leq \pi \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{8} \\ \text{ou} \\ \dfrac{3\pi}{8} < x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{8}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{8}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$



3.2.2 Corrigé Fernand ODONNAT du Vauclin

- L'ensemble de définition de cette inéquation est :$\mathcal{D} = [-\pi; \pi]$
- ou bien $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2}$ alors $\sqrt{2}\,sin(2x) - 1 = -1 < 0$ donc $\{\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\} \subset \mathcal{S}$
- ou bien $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ alors on peut poser $t = \tan(x)$ alors $sin(2x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

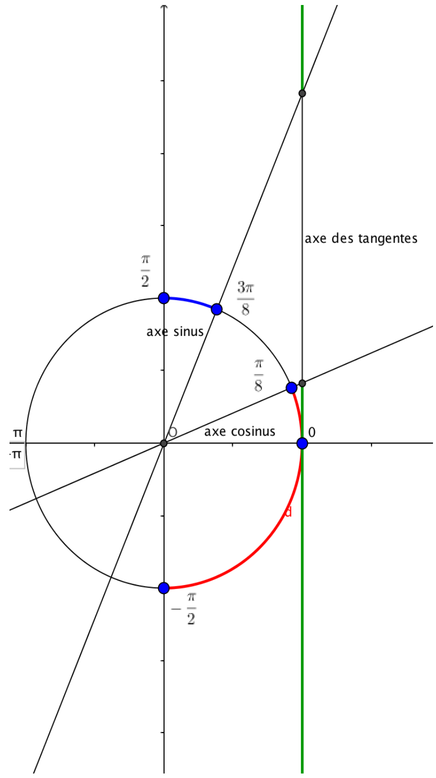
  Donc $(I) \iff \dfrac{2t}{1+t^2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff 4t < \sqrt{2} + \sqrt{2}t^2 \iff \sqrt{2}t^2 - 4t + \sqrt{2} > 0$

  $\Delta = (-2)^2 - \sqrt{2}\sqrt{2} = 4 - 2 = 2 > 0$

  L'équation $\sqrt{2}t^2 - 4t + \sqrt{2} = 0$ a deux solutions :

  $t_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 = tan(\dfrac{\pi}{8})$ et $t_2 = \sqrt{2} + 1 = tan(\dfrac{3\pi}{8})$

  Donc $(I) \iff t < t_1$ ou $t > t_2 \iff tan(x) < tan(\dfrac{\pi}{8})$ ou $tan(x) > tan(\dfrac{3\pi}{8})$
-
- L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{8}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{8}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$



3.3 Inéquations

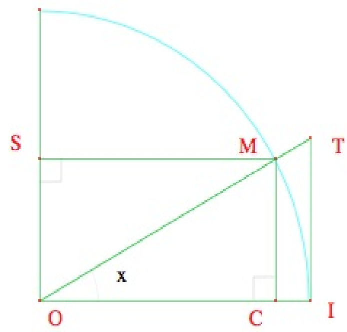
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue réelle x puis représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $2\cos^2(x) > 1$
2. $\tan^2(x) - (\sqrt{3} - 1)\tan(x) - \sqrt{3} < 0$

4 Limites

4.1 Les 4 limites de base

Soit x un réel de l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$ Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ mesure x en radians.
On rappelle que l'aire d'un secteur angulaire de mesure x en radians dans un cercle de rayon R est $\frac{xR^2}{2}$



1. Que vaut OI ?
2. Exprimer , en fonction de x, les distances OC, OS et IT puis les aires des triangles OIM et OITainsi que l'aire du secteur angulaire IOM.
3. Prouver alors que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\sin(x) < x < \tan(x)$
4. En déduire que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$
5. Déterminer $\lim\limits_{x\mapsto 0} \cos(x)$ puis $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{\tan(x)}{x}$
6. Vérifier que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{1}{1+\cos(x)}(\frac{\sin(x)}{x})^2 = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$
7. En déduire que $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et que $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

4.2 Calcul de limites

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sin(x)$
2. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x + \sin(x)$
4. $\lim\limits_{x \mapsto 0} x \ \sin(\dfrac{1}{x})$
5. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 - \cos(x)$
6. $\lim\limits_{x \mapsto 0} x^2(\sin(x) + \cos(x))$
7. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$
8. $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{2}} \dfrac{cotan(x)}{x - \dfrac{\pi}{2}}$
9. $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\ \cos(x) - \sin(x)}{x - \dfrac{\pi}{3}}$
10. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$
11. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin^2(5x)}$
12. $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(6x)}{2\ \cos(x) - \sqrt{3}}$

4.2.1 Corrigé

1. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sin(x)$ n'existe pas car $sin(x)$ oscille entre -1 et 1
2. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$?
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
   - Comme il existe au moins un intervalle du type $]A; +\infty[$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$
   - $-1 \leq sin(x) \leq x$
   - donc si $x > 0$ alors $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{sin(x)}{x} = 0$

3. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x + sin(x)$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Comme il existe au moins un intervalle du type $]A; +\infty[$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$
   - $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 1$
     Or $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x - 1 = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x + sin(x) = +\infty$

4. $\lim\limits_{x\mapsto 0} x\, sin(\frac{1}{x})$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
   - Comme il existe au moins un intervalle épointé de centre 0 inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)$
   - Si $x > 0$ comme $-1 \leq sin(\frac{1}{x}) \leq 1$ alors $-x \leq x\, sin(\frac{1}{x}) \leq x$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} -x = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 0^+} x = 0$ alors $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\, sin(\frac{1}{x}) = 0$
   - Si $x < 0$ comme $-1 \leq sin(\frac{1}{x}) \leq 1$ alors $-x \geq x\, sin(\frac{1}{x}) \geq x$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} -x = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 0^-} x = 0$ alors $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x\, sin(\frac{1}{x}) = 0$
   - Comme $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x\, sin(\frac{1}{x}) = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\, sin(\frac{1}{x}) = 0$ alors $\lim\limits_{x\mapsto 0} x\, sin(\frac{1}{x}) = 0$

5. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2 - cos(x)$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Comme il existe au moins un intervalle du type $]-\infty; B[$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$
   - Comme $-1 \leq cos(x) \leq 1$ alors $1 \geq -cos(x) \geq -1$ donc $-1 \leq -cos(x) \leq 1$ d'où $x^2 - 1 \leq x^2 - cos(x) \leq x^2 + 1$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2 - 1 = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2 + 1 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2 - cos(x) = +\infty$

6. $\lim\limits_{x\mapsto 0} x^2(sin(x) + cos(x))$
   - L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Comme il existe au moins un intervalle épointé de centre 0 inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors on peut rechercher $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)$
   - Comme $-1 \leq sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq cos(x) \leq 1$ alors $-2 \leq sin(x) + cos(x) \leq 2$
   - Or $x^2 \geq 0$ donc $-2x^2 \leq x^2(sin(x) + cos(x)) \leq 2x^2$
   - D'après le théorème d'encadrement par des fonctions ayant même limite, comme $\lim\limits_{x\mapsto 0} -2x^2 = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 0} 2x^2 = 0$ alors $\lim\limits_{x\mapsto 0} x^2(sin(x) + cos(x)) = 0$

7. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{sin(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}}$

8. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{2}} \dfrac{cotan(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

9. $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\, cos(x) - sin(x)}{x - \frac{\pi}{3}}$

10. $\lim_{x \mapsto 0} \dfrac{tan(x) - sin(x)}{x^3}$

11. $\lim_{x \mapsto 0} \dfrac{1 - cos(x)}{sin^2(5x)}$

- L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \{x \ / \ sin^2(5x) \neq 0\} = \{x \ / \ sin(5x) \neq 0\}$

  Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{k\pi}{5} \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

  car $sin(5x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 5x = k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{k\pi}{5}$
- Comme il existe au moins un intervalle de centre 0 inclus dans $\mathcal{D}_{\{}$ alors on peut rechercher $\lim_{x \mapsto 0} f(x)$
- Par la méthode directe, il y a indétermination du type $''\dfrac{0}{0}''$ car

  $\lim_{x \mapsto 0} 1 - \cos(x) = 0$ et $\lim_{x \mapsto 0} sin^2(5x) = 0$
- Levons cette indétermination :

  $$f(x) = \frac{1 - cos(x)}{sin^2(5x)} = \frac{\dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} x^2}{\left(\dfrac{\sin(5x)}{5x}\right)^2 25x^2}$$

  Or $\lim_{x \mapsto 0} \dfrac{x^2}{25x^2} = \dfrac{1}{25} \quad ; \quad \lim_{x \mapsto 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

  donc $\lim_{x \mapsto 0} f(x) = \dfrac{1}{50}$

12. $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(6x)}{2\ \cos(x) - \sqrt{3}}$

- L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \{x \ /2\cos(x) - \sqrt{3} \neq 0\} = \{x \ / \ \cos(x) \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$

  Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

  car $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) = \dfrac{\pi}{6} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$
- Comme il existe au moins un intervalle de centre $\dfrac{\pi}{6}$ inclus dans $\mathcal{D}_{\{}$ alors on peut rechercher $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{6}} f(x)$
- Par la méthode directe, il y a indétermination du type $''\dfrac{0}{0}''$ car

  $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{6}} \sin(6x) = 0$ et $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{6}} 2\ \cos(x) - \sqrt{3} = 0$
- Levons cette indétermination :

  Posons $h = x - \dfrac{\pi}{6}$ alors

$$\frac{\sin(6x)}{2\ \cos(x)-\sqrt{3}} = \frac{\sin(6(h+\dfrac{\pi}{6})}{2\ \cos(h+\dfrac{\pi}{6})-\sqrt{3}} = \frac{\sin(6h+\pi)}{2\left[\cos(h)\cos(\dfrac{\pi}{6})-\sin(h)\sin(\dfrac{\pi}{6}\right]-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sin(6h+\pi)}{\sqrt{3}\cos(h)-\sin(h)-\sqrt{3}} = \frac{-\sin(6h)}{\sqrt{3}(\cos(h)-1)-\sin(h)}$$

$$= \frac{6\ \dfrac{-\sin(6h)}{6h}}{\dfrac{\sqrt{3}(\cos(h)-1)}{h}-\dfrac{\sin(h)}{h}}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(6x)}{2\ \cos(x)-\sqrt{3}} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{6\ \dfrac{-\sin(6h)}{6h}}{\dfrac{\sqrt{3}(\cos(h)-1)}{h}-\dfrac{\sin(h)}{h}} = 6$

car $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{\sin(h)}{h}=1 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0}\frac{\sin(6h)}{6h}=1 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0}\frac{1-\cos(h)}{h}=0$

4.3 Une fonction spéciale

Etudier la continuité puis la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction suivante f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x = 0 \\ x^2 \, sin(\frac{1}{x}) \; si \; x \neq 0 \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

4.4 Prolongement par continuité

Pouvez-vous prolonger par continuité en 0 la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x}{sin(x)}$

- $\dfrac{2x}{sin(x)}$ existe à condition que $2x$ existe et $sin(x)$ existe et $sin(x) \neq 0$,
  c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad x \neq k\pi$
  car $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad 2x \text{ existe} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad sin(x) \text{ existe} \\ sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi \end{cases}$
- Par conséquent, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

f est continue sur $\mathcal{D}_f$ car

- $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_f$
- $x \mapsto sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_f$
- $x \mapsto sin(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathcal{D}_f$

Or on sait que $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{2x}{sin(x)} = 2$

On peut donc créer g prolongement par continuité de f en 0 en posant : $\begin{cases} g(0) = 2 \\ g(x) = f(x) \text{si } x \in \mathcal{D}_f \end{cases}$

5 Applications trigonométriques de la Formule de Moivre et du binôme de Newton

5.1 Formules de multiplication des arcs

Exprimer en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ les nombres réels suivants :

$$\cos(2\theta); \sin(2\theta), \cos(3\theta); \sin(3\theta); \cos(4\theta); \sin(4\theta)$$

5.2 Linéarisation de polynômes trigonométriques

Linéariser (c'est-à-dire transformer les polynômes suivants en une combinaison linéaire de cosinus et de sinus de multiples de θ :

$$\cos^2(\theta); \sin^2(\theta); \cos^3(\theta); \sin^3(\theta); \cos^4(\theta); \sin^4(\theta); \cos^5(\theta); \sin^5(\theta); sin^3(\theta)cos^4(\theta)$$

6 Intégration et trigonométrie

6.1 Exercice - Bac Rennes C 77

Soit $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)} dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin(x)} dx$ et $I_2 = I_1 + I$

1. Calculer I_2
2. Calculer I_1
3. En déduire I

6.2 Intégration et trigonométrie

On pose $I(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt$; $J(x) = \int_0^x \sin^2(t)\,dt$

1. Calculer $I(x) + J(x)$
2. Calculer $I(x) - J(x)$
3. En déduire la valeur de $I(x)$ puis celle de $J(x)$

6.2.1 Corrigé

$I(x)$ existe car la fonction $t \mapsto \cos^2(t)$ est continue sur l'intervalle de bornes 0 et x car elle est continue sur $\mathbb{R}$
$J(x)$ existe car la fonction $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur l'intervalle de bornes 0 et x car elle est continue sur $\mathbb{R}$

1. $I(x) + J(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt + \int_0^x \sin^2(t)\,dt = \int_0^x (\cos^2(t) + \sin^2(t))\,dt = \int_0^x 1\,dt = [t]_0^x = x$
2. $I(x) - J(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt - \int_0^x \sin^2(t)\,dt = \int_0^x (\cos^2(t) - \sin^2(t))\,dt$
   $= \int_0^x \cos(2t)\,dt = [\frac{1}{2}\sin(2t)]_0^x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
3. Comme $I(x) + J(x) = x$ et que $I(x) - J(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ alors
   $I(x) = \frac{1}{2}[x + \frac{1}{2}\sin(2x)] = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ et $J(x) = \frac{1}{2}[x - \frac{1}{2}\sin(2x)] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$

7 La trigonométrie et l'ensemble $\mathbb{C}$

7.1 Exercice

Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}$

7.2 Exercice

Soit θ un réel tel que $\forall k \in \mathbb{Z}\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
Déterminer, en fonction de θ , le module et un argument de

1. $z_1 = \dfrac{1}{1 + i\tan(\theta)}$
2. $z_2 = \dfrac{1}{1 - i\tan(\theta)}$
3. $z_3 = \dfrac{1}{i + \tan(\theta)}$

7.3 Exercice

Soient a et b des réels.

1. Démontrer que $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} 2\cos(\frac{a-b}{2})$
2. Démontrer que $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i\sin(\frac{a-b}{2})$
3. En déduire que $\frac{e^{ia} + e^{ib}}{e^{ia} - e^{ib}} = -i\, cotan(\frac{a-b}{2})$
4. En déduire que $\frac{e^{ia} - e^{ib}}{e^{ia} + e^{ib}} = i\tan(\frac{a-b}{2})$
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{z-2i}{z+2i})^k = 0$

7.4 Exercice

Pour tout entier $n \geq 2$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$.

1. Posons $z = \cos(\frac{\pi}{n}) + \sin(\frac{\pi}{n})$.

   Donner une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$

2. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme.

   En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{1}{\tan(\frac{2\pi}{n})}$

3. Quelle est $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{S_n}{n}$?

7.5 Exercice

Le plan complexe P est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
Soient les points A d'affixe a $\neq$ b, B d'affixe b et M d'affixe z.
Soit le nombre complexe $z' = \dfrac{z-a}{z-b}$
1°) Donner une interprétation géométrique de $\mid z' \mid$ et de arg(z').
2°) Déterminer puis construire les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{M \in P / \mid z' \mid = 1\}$
2. $E_2 = \{M \in P / \mid z' \mid = k\}$ où $k > 0$ et $k \neq 1$
3. $E_3 = \{M \in P / z' \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{M \in P / z' \in \mathbb{R}^+\}$
5. $E_5 = \{M \in P / z' \in i\mathbb{R}\}$

7.6 Exercice (Bac S Antilles-Guyane)

On considère dans le plan complexe, les points O d'affixe 0, A d'affixe 1 et B d'affixe -1.
A tout point M d'affixe $z \neq 1$, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$
1°) Etablir que $\mid z' \mid = 1$
2°) Etablir que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
3°) Etablir que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
4°) Interpréter géométriquement à l'aide des points M, M', O, A et B les 3 propriétés établies précédemment.
5°) Donner une construction géométrique de M' connaissant M.

7.7 Nantes C 83

1. Déterminer les racines cinquièmes complexes de 1.
2. Démontrer que la somme S des solutions est nulle.
3. En décomposant S selon sa partie réelle et sa partie imaginaire et en remarquant que $cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et que $cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
   démontrer que $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1}{2}$
4. Utiliser le fait que $cos(2\theta) = 2cos(\theta)^2 - 1$ pour obtenir une équation du second degré que vérifie $cos(\frac{2\pi}{5})$.
   En déduire que $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et que $cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
5. Détaillez alors une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier convexe.

7.7.1 Corrigé

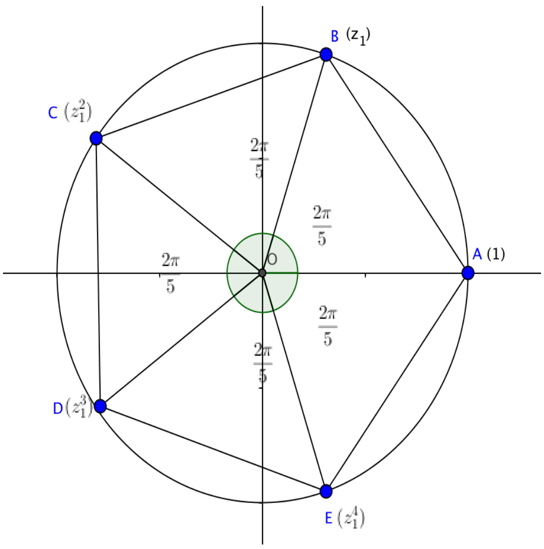
1. Soit l'équation $z^5 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   - L'ensemble de définition de cette équation est $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.
   - $z = 0 \notin \mathcal{S}$.
   - On cherche donc des solutions z dans $\mathbb{C}^*$. Posons alors $z = r\, e^{i\theta}$.
     $z^5 = 1 \iff (r\, e^{i\theta})^5 = 1 \iff r^5\, e^{5i\theta} = 1\, e^{i0} \iff \begin{cases} r^5 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad 5\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$
     $\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \dfrac{2k\pi}{5} \end{cases}$
   - Les solutions s'obtiennent en donnant à k cinq valeurs entières consécutives $0, 1, 2, 3, 4$

   $$\mathcal{S} = \left\{ 1\, e^{i\frac{2(0)\pi}{5}} ;\, 1\, e^{i\frac{2(1)\pi}{5}} ;\, 1\, e^{i\frac{2(2)\pi}{5}} ;\, 1\, e^{i\frac{2(3)\pi}{5}} ;\, 1\, e^{i\frac{2(4)\pi}{5}} \right\}$$

   En posant $\boxed{z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}}$ alors $\begin{cases} 1e^{i\frac{2(0)\pi}{5}} = e^{i0} = 1 = z_1^0 \\ e^{i\frac{2(1)\pi}{5}} = z_1 \\ e^{i\frac{2(2)\pi}{5}} = z_1^2 \\ e^{i\frac{2(3)\pi}{5}} = z_1^3 \\ e^{i\frac{2(4)\pi}{5}} = z_1^4 \end{cases}$

   donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{1; z_1; z_1^2; z_1^3; z_1^4\right\}}$

.



2. En posant $z_1 = e^{i\dfrac{2\pi}{5}}$

   $S = 1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = 1\,\dfrac{1 - z_1^5}{1 - z_1} = \dfrac{1-1}{1-z_1} = 0$

   en utilisant la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

3. $0 = S = cos(0) + i\,sin(0) + cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\,sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + i\,sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + i\,sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) + i\,sin\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$

   d'où $0 = \mathcal{R}e(S) = cos(0) + cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$

   Or $cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ et $cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

   donc $0 = 1 + 2\,cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\,cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ d'où $-1 = 2\left[cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right]$

   Par conséquent, $\boxed{cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1}{2}}$

4. Comme $cos(2\theta) = 2cos(\theta)^2 - 1$ alors

   $\dfrac{-1}{2} = cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\,cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) - 1$

   On constate alors que $cos(\dfrac{2\pi}{5})$ vérifie l' équation du second degré : $2X^2 + X - \dfrac{1}{2} = 0$

   $\Delta = (1)^2 - 4(2)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 + 4 = 5$

   $2X^2 + X - \dfrac{1}{2} = 0$ a donc pour solutions $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$ Or $cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) < 0$ donc $\boxed{cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ et que $\boxed{cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}}$

5. Détaillez alors une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier convexe.

7.8 Exercice

Dans le plan complexe, soient les points A, B et C d'affixes respectives a,b et c.
Démontrer l'équivalence logique suivante :
ABC est équilatéral $\Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$

7.9 Exercice (Bac S Antilles-Guyane)

Soit le nombre complexe $A = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$
1°) Démontrer que $A^2 = -2\sqrt{3} - 2i$
2°)Déterminer alors le module et un argument de A^2.
3°) En déduire le module de A et vérifier qu'un argument de A est bien $\dfrac{19\pi}{12}$ et non $\dfrac{7\pi}{12}$.
4°) Représenter alors sur un même graphique $A, -A$ et A^2.
5°) Déduire de ce qui précède que :
$\cos(\dfrac{7\pi}{12}) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et que $\sin(\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
6°) Déterminer les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et de $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.
7°) Déterminer puis dessiner l'ensemble (D) des nombres complexes z tels que A^2z soit un nombre réel.

7.10 Exercice

Soit $z = \cos^2(\phi) + i\sin(\phi)\cos(\phi)$

1. Déterminer toutes les valeurs de ϕ telles que $z = 0$.
2. Ces valeurs de Φ étant exclues,
   (a) Ecrire alors z^{-1} sous forme cartésienne.
   (b) Ecrire sous forme cartésienne z^2, z^3, z^{-2}, z^{-3}
   (c) Retrouver les résultats des 2 questions précédentes en utilisant la forme trigonométrique de z

7.11 Exercice

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z

1. $z^2 - (3\cos(\theta) + i\sin(\theta)z + 2 = 0$
2. $z^6 - z^3 + 1 + i = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique.
3. $\cos(2\alpha)z^2 - 2i(\cos(\alpha)z - 1 + 0$.
   On appelera z_1 et z_2 les solutions. Après avoir déterminé z_1 et z_2 on cherchera une CNS sur α pour que $M_1M_2 = 2$ sachant que M_1 et M_2 ont pour affixes respectives z_1 et z_2