

Applications linéaires

Christian CYRILLE

27 février 2026

1 Définitions

1.1 Définition initiale

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soient \vec{E} et \vec{F} des \mathbb{K} -espaces vectoriels réels.

On dit que

$$f: \vec{E} \longrightarrow \vec{F} \\ \vec{u} \longmapsto \overrightarrow{f(\vec{u})}$$

est une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} lorsque f vérifie les deux propriétés suivantes :

•

$$P_1: \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad f(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{f(\vec{u})} + \overrightarrow{f(\vec{v})}$$

c'est-à-dire que l'image d'une somme de vecteurs est la somme des images de ces vecteurs.

•

$$P_2: \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad f(\lambda \vec{u}) = \lambda \overrightarrow{f(\vec{u})}$$

c'est-à-dire que l'image de la multiplication d'un réel par un vecteur est la multiplication de ce réel par l'image de ce vecteur.

1.2 Définitions équivalentes

Les propriétés P_1 et P_2 sont équivalentes à la propriété suivante :

$$P_3: \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \overrightarrow{f(\vec{u})} + \beta \overrightarrow{f(\vec{v})}$$

c'est-à-dire que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images de ces vecteurs.

ou encore à la propriété

$$P'_3: \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda \overrightarrow{f(\vec{u})} + \overrightarrow{f(\vec{v})}$$

1.3 Notations

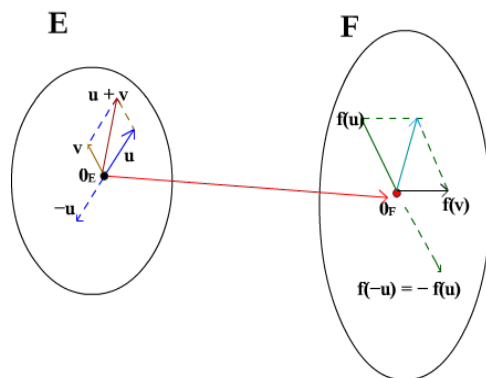
- Une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} s'appelle un **homomorphisme** de \vec{E} dans \vec{F} .
L'ensemble des applications linéaires de \vec{E} dans \vec{F} se note : $\mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$
- Une application linéaire de \vec{E} dans \vec{E} s'appelle un **endomorphisme** de \vec{E} .
L'ensemble des endomorphismes de \vec{E} se note : $\mathcal{L}(\vec{E})$
- Une application linéaire **bijective** de \vec{E} dans \vec{F} s'appelle un **isomorphisme** de \vec{E} dans \vec{F} .
L'ensemble des isomorphismes de \vec{E} dans \vec{F} se note : $\mathcal{GL}(\vec{E}; \vec{F})$.
 $\mathcal{GL}(\vec{E}; \vec{F})$ muni de la loi de composition des applications \circ est un groupe qu'on appelle le groupe linéaire de \vec{E} .
- Un endomorphisme bijectif s'appelle un **automorphisme** de \vec{E} .
L'ensemble des automorphismes de \vec{E} se note : $\mathcal{AUT}(\vec{E})$.
- On appelle **forme linéaire** de \vec{E} toute application de \vec{E} dans \mathbb{R} .

2 Propriétés

Soit f une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} alors :

$$P_4 : f(\vec{0}_{\vec{E}}) = \vec{0}_{\vec{F}}$$

$$P_5 : \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$$



2.1 Démonstration

1. Méthode 1 pour P_4 :
 $f(\vec{0}_{\vec{E}}) = f(0 \cdot \vec{0}_{\vec{E}}) = 0 \cdot f(\vec{0}_{\vec{E}}) = \vec{0}_{\vec{F}}$ d'après P_2
Par conséquent, $f(\vec{0}_{\vec{E}}) = \vec{0}_{\vec{F}}$
2. Méthode 2 pour P_4 :
 $f(\vec{0}_{\vec{E}}) = f(\vec{0}_{\vec{E}} + \vec{0}_{\vec{E}}) = f(\vec{0}_{\vec{E}}) + f(\vec{0}_{\vec{E}})$ d'après P_1
Par conséquent, $2f(\vec{0}_{\vec{E}}) = f(\vec{0}_{\vec{E}})$ donc $f(\vec{0}_{\vec{E}}) = \vec{0}_{\vec{F}}$
3. $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad f(-\vec{u}) = f((-1) \cdot \vec{u}) = (-1) \cdot f(\vec{u}) = -f(\vec{u})$ d'après P_2

3 Exemples Classiques

3.1 La fonction nulle

La fonction nulle

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & \Theta(\vec{u}) = \vec{0} \end{array}$$

est un endomorphisme de \vec{E}

3.2 La fonction Identité

La fonction identité

$$Id_{\vec{E}} : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & id(\vec{u}) = \vec{u} \end{array}$$

est un endomorphisme de \vec{E}

3.3 L'homothétie vectorielle

L'homothétie vectorielle h_λ de rapport $\lambda \neq 0$

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & h_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \end{array}$$

est un endomorphisme de \vec{E}

3.4 La fonction linéaire en dimension 1

La fonction linéaire f_a

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_a(x) = ax \end{array}$$

est un endomorphisme de \mathbb{R} donc une forme linéaire sur \mathbb{R}

3.5 La fonction linéaire en dimension 2

La fonction f

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (ax + by, cx + dy) \end{array}$$

est un endomorphisme de \mathbb{R}^2

3.6 La fonction linéaire en dimension 3

La fonction k

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & k(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz) \end{array}$$

est un endomorphisme de \mathbb{R}^3

3.7 Trace d'une matrice

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} . Alors la fonction Trace Tr

$$\begin{aligned} Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M = (a_{i,j}) &\longmapsto Tr(M) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
car

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{cases} Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B) \\ Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A) \end{cases}$$



On a pour la trace d'une matrice une propriété supplémentaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad Tr(AB) = Tr(BA)$$

Attention!!!

il existe des matrices carrées de même ordre A et B telles que $Tr(AB) \neq Tr(A)Tr(B)$

3.8 La fonction Dérivée

Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} .

- L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions numériques dérivables sur \mathbb{R} est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- L'application Dérivée Der

$$\begin{aligned} Der : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto Der(f) = f' \end{aligned}$$

est une application linéaire.

3.9 La fonction Intégrale

Soit $I = [a; b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} .

- L'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions numériques continues sur \mathbb{R} est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- L'application Intégrale Int

$$\begin{aligned} Int : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto Int(f) = \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

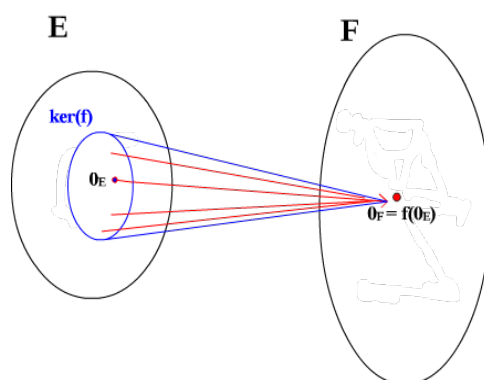
est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

4 Noyau d'une application linéaire

4.1 Définition

Soit f une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} .
On appelle noyau de f qu'on note $\ker(f)$ ou $N(f)$ l'ensemble suivant

$$\ker(f) = \{\vec{u} \in \vec{E} / f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$



4.2 Propriétés

4.2.1

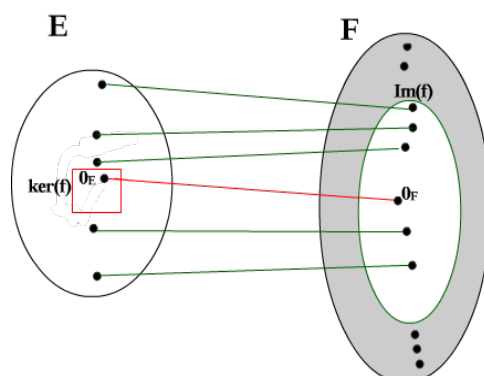
P_5 : $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de \vec{E}

Démonstration :

- $\ker(f) \subset \vec{E}$ et $\ker(f) \neq \emptyset$ car $\vec{0}_{\vec{E}} \in \ker(f)$ puisque $f(\vec{0}_{\vec{E}}) = \vec{0}_{\vec{F}}$
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ $\vec{u} \in \ker(f)$ $\vec{v} \in \ker(f)$ alors : $f(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \alpha\vec{0}_{\vec{F}} + \vec{0}_{\vec{F}} = \vec{0}_{\vec{F}}$
donc $\alpha\vec{u} + \vec{v} \in \ker(f)$
- D'après les 2 propriétés précédentes, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E}

4.2.2 Condition nécessaire et suffisante d'injectivité d'une application linéaire.

$P_6 : \ker(f) = \{\vec{0}\} \iff f \text{ est injective}$



Démonstration :

1. \implies :

Supposons que $\ker(f) = \{\vec{0}\}$. Nous allons démontrer que f est injective.

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$ si $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$ alors $f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}_F$ donc $f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}_F$ car f est linéaire.

Donc $\vec{u} - \vec{v} \in \ker(f)$ Or $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ donc $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}_E$ donc $\vec{u} = \vec{v}$. CQFD.

2. \impliedby :

Supposons que f est injective.

- D'une part, $\vec{0}_E \in \ker(f)$ donc $\{\vec{0}_E\} \subset \ker(f)$.

- D'autre part, nous allons démontrer que $\ker(f) \subset \{\vec{0}_E\}$.

Soit $\vec{u} \in \ker(f)$ alors $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$ donc $f(\vec{u}) = f(\vec{0}_E)$.

Or f est injective donc $\vec{u} = \vec{0}_E$ d'où $\vec{u} \in \{\vec{0}_E\}$. CQFD.

- Comme $\{\vec{0}_E\} \subset \ker(f)$ et $\ker(f) \subset \{\vec{0}_E\}$ alors $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

3. On en déduit que $\ker(f) = \{\vec{0}\} \iff f$ est injective.

4.2.3

P_7 : Si f est une application linéaire **injective** de \vec{E} dans \vec{F} alors l'image d'une famille **libre** d'éléments de \vec{E} est une famille **libre** d'éléments de \vec{F} **ayant le même nombre d'éléments**.

Démonstration :

Soit \mathcal{L} une famille libre $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n)$ de n éléments.

Notons $f < \mathcal{L} > = \{f(\vec{l}_1), \dots, f(\vec{l}_n)\}$

- Alors comme f est injective tous les $f(\vec{l}_i)$ sont distincts deux à deux.
- Pour démontrer que $f < \mathcal{L} >$ est libre, nous allons prouver que toute combinaison linéaire nulle de ses éléments entraîne que tous les coefficients et cette combinaison sont

nuls.

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{l}_i) = \vec{0}_F$ donc $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{l}_i\right) = \vec{0}_F$ car f est linéaire.

Par conséquent, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{l}_i \in \ker(f)$. Or f est injective, donc $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$.

On a donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{l}_i = \vec{0}_E$. or la famille \mathcal{L} est libre donc $\forall i \in [1; n] \quad \lambda_i = 0$. CQFD.

4.2.4

P_8 : Réciproque de P_7 :

Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F .

L'image de toute partie libre est libre $\implies f$ est injective

Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas injective donc $\ker(f) \neq \{0\}$.

Par conséquent, $\exists x \neq 0 \quad f(x) = 0$.

Donc $\exists x_1 \in E \quad \exists x_2 \in E \quad (x_1, x_2)$ est libre avec $x = x_1 + x_2$.

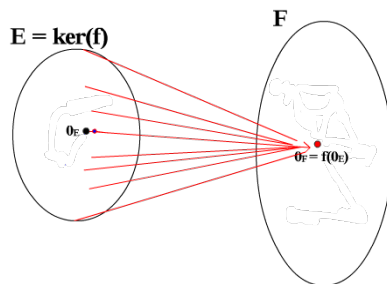
Comm l'image de toute partie libre est libre alors $(f(x_1), f(x_2))$ est libre.

Ceci est impossible car $0 = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ donc la famille $(f(x_1), f(x_2))$ est liée.

Par conséquent, $\ker(f) = \{0\}$ donc f est injective.

4.2.5

P_9 : $\ker(f) = \vec{E} \iff f$ est la fonction nulle Θ



1. \implies :

Si $\ker(f) = \vec{E}$ alors $\forall \vec{u} \in \vec{E}$ on a $\vec{u} \in \ker(f)$ donc $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$ donc $f = \Theta$

2. \impliedby :

Si $f = \Theta$ alors $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad f(\vec{u}) = \vec{0}_F$ donc $\vec{u} \in \ker(f)$ donc $\vec{E} \subset \ker(f)$.

Or on sait déjà que $\ker(f) \subset \vec{E}$ donc $\ker(f) = \vec{E}$

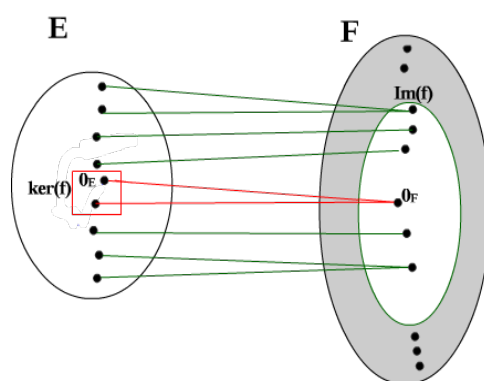
5 Ensemble-Image d'une application linéaire

5.1 Définition

Soit f une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} .

On appelle ensemble-image de \vec{E} par f qu'on note $f(\vec{E})$ ou $Im(f)$ l'ensemble suivant

$$Im(f) = \{\vec{v} \in \vec{F} / \exists \vec{u} \in \vec{E} \quad \vec{v} = f(\vec{u})\}$$



5.2 Propriétés

5.2.1

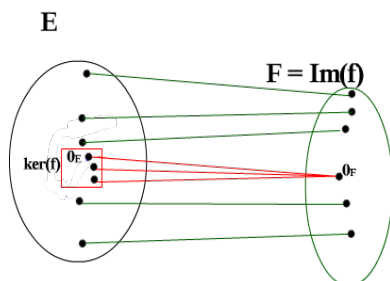
P_9 : $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de \vec{F}

Démonstration :

- $Im(f) \subset \vec{F}$ et $Im(f) \neq \emptyset$ car $\vec{0}_F \in Im(f)$ puisque $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ $\vec{u}' \in Im(f)$ $\vec{v}' \in Im(f)$ alors $\exists \vec{u} \in \vec{E}$ $\vec{u}' = f(\vec{u})$ et $\exists \vec{v} \in \vec{E}$ $\vec{v}' = f(\vec{v})$
Alors $\alpha \vec{u}' + \vec{v}' = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = f(\alpha \vec{u} + \vec{v})$. Or $\alpha \vec{u} + \vec{v} \in \vec{E}$ donc $\alpha \vec{u}' + \vec{v}' \in Im(f)$
- D'après les 2 propriétés précédentes, $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de \vec{F}

5.2.2 Condition nécessaire et suffisante de surjectivité d'une application linéaire.

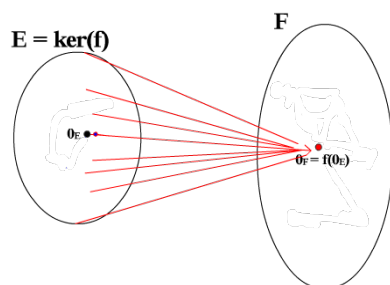
$P_{10} : \text{Im}(f) = \vec{F} \iff f \text{ est surjective.}$



Démonstration évidente : c'est la définition même de la surjectivité.

5.2.3

$P_{11} : \text{Im}(f) = \{0_{\vec{F}}\} \iff f \text{ est la fonction nulle } \Theta$



1. \implies :

Supposons $\text{Im}(f) = \{0_{\vec{F}}\}$

$\forall \vec{u} \in \vec{E}$ on a $f(\vec{u}) \in \text{Im}(f)$. Or $\text{Im}(f) = \{0_{\vec{F}}\}$

donc $f(\vec{u}) = 0_{\vec{F}}$ donc $f = \Theta$

2. \impliedby :

Supposons $f = \Theta$

$\forall \vec{u}' \in \text{Im}(f) \exists \vec{u} \in \vec{E} \vec{u}' = f(\vec{u})$. Or $f = \Theta$ donc $f(\vec{u}) = 0_{\vec{F}}$ d'où $\vec{u}' = 0_{\vec{F}}$.

On a donc $\text{Im}(f) \subset \{0_{\vec{F}}\}$.

Or on sait déjà que $\{0_{\vec{F}}\} \subset \text{Im}(f)$ donc $\text{Im}(f) = \{0_{\vec{F}}\}$

5.2.4 Famille génératrice de $Im(f)$ ♡ ♡ ♡



P_{12} : Si \vec{E} a une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ alors :

1. tout vecteur \vec{u} s'écrit $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ donc $f(\vec{u}) = f(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(\vec{e}_i)$

2. Par conséquent ,

$$Im(f) = Vect(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$$

$Im(f)$ est donc le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$

3. Si f est injective alors la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est libre donc est une base de $Im(f)$

4. Si f est surjective alors la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ engendre \vec{F}

5. Si f est bijective alors la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une base de \vec{F}

5.2.5 Définition du rang d'un homomorphisme



- Si \vec{E} est un \mathbb{K} -espace vectoriel de **dimension finie** n
- Si \vec{F} est un \mathbb{K} -espace vectoriel de **dimension quelconque**.
- Si $f \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$

alors on appelle

$$rang(f) = dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$$

. Comme $dim(E) = n < +\infty$ alors E a une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

Alors la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ va engendrer $Im(f)$.

Donc $Im(f)$ est de dimension finie $\leq n$.

Le rang de f est alors le **nombre maximum de vecteurs libres** parmi les $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$

$$rang(f) = rang(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$$

Attention!!!

Si $dim(E) = +\infty$ alors on ne sait rien sur $dim(Im(f))$!!!

5.3 Théorème de la dimension ou Théorème du rang ♡ ♡ ♡



Soit \vec{E} un espace vectoriel de dimension finie et \vec{F} est un espace vectoriel de dimension quelconque. Soit f une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} .

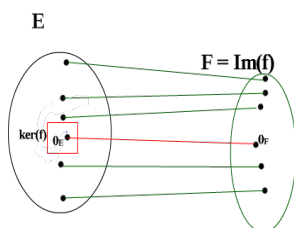
Alors

$$\dim(\vec{E}) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \text{rang}(f)$$

5.4 Corollaire ♡ ♡ ♡

Soient \vec{E} et \vec{F} des espaces vectoriels ayant tous les deux la même dimension finie. Soit f une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} . Alors on a les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned} & f \text{ est injective} \\ & \iff \\ & \ker(f) = \{0_{\vec{E}}\} \\ & \iff \\ & \dim(\vec{F}) = \dim(\vec{E}) = \dim(\text{Im}(f)) \\ & \iff \\ & f \text{ est surjective} \\ & \iff \\ & f \text{ est bijective} \\ & \iff \\ & f \text{ est un isomorphisme de } \vec{E} \text{ sur } \vec{F} \\ & \iff \\ & \text{l'image d'une base de } \vec{E} \text{ est une base de } \vec{F} \end{aligned}$$



6 Espaces d'applications linéaires

6.1 L'espace vectoriel des applications linéaires

1. L'ensemble des applications linéaires de l'ev \vec{E} vers l'ev \vec{F} noté $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un \mathbb{K} -espace vectoriel réel.

2. Si $\dim(\vec{E}) = n$ et $\dim(\vec{F}) = p$ alors

$$\dim(\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})) = np$$

3. Si $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de \vec{E} et $(\vec{f}_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de \vec{F} alors une base de $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ est la famille $(l_{(i,j)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ où $l_{(i,j)}(\vec{e}_k) = \delta_i^k \vec{f}_j$

6.2 L'algèbre des endomorphismes

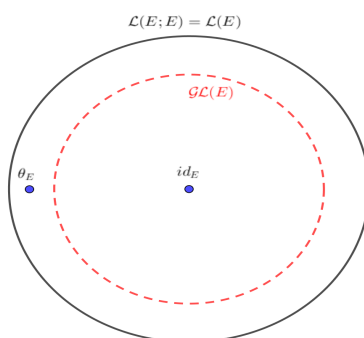
L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel \vec{E} noté $\text{End}(\vec{E})$ ou $\mathcal{L}(\vec{E})$ muni de l'addition, de la multiplication par un scalaire, de la loi de composition \circ est une \mathbb{K} -algèbre.

$$(\mathcal{L}(\vec{E}), +, \times, \circ) \text{ est une algèbre.}$$

6.3 Groupe des automorphismes

L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel \vec{E} noté $GL(\vec{E})$ muni de de la loi de composition \circ est un groupe.

$$(GL(\vec{E}), \circ) \text{ est un groupe appelé le groupe linéaire de } E.$$



7 Matrices et applications linéaires

7.1 Définition

Soient \vec{E} et \vec{F} des espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectives p et n .
 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ une base de \vec{E} .
 Soit $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ une base de \vec{F} .
 Soit f une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} .
 Alors la matrice M de format (n, p) dont les p vecteurs colonnes sont les coordonnées de $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p)$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ de \vec{F} est alors appelée **la matrice de l'application linéaire f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'**

$$M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_n \end{matrix}$$

7.2 Premiers exemples classiques

7.2.1 Matrice de l'application linéaire nulle

Si $\dim(\vec{E}) = n$ alors la matrice de la fonction nulle

$$\Theta : \begin{matrix} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & \Theta(\vec{u}) = \vec{0} \end{matrix}$$

est la matrice nulle.

$$\boxed{\text{Mat}(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = O}$$

7.2.2 Matrice de l'application linéaire identité

Si $\dim(\vec{E}) = n$ alors la matrice de la fonction Identité

$$Id_{\vec{E}} : \begin{matrix} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & Id_{\vec{E}}(\vec{u}) = \vec{u} \end{matrix}$$

est la matrice identité I_n de dimension n .

$$\boxed{\text{Mat}(Id, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n}$$

7.2.3 Matrice de l'homothétie vectorielle

Si $\dim(\vec{E}) = 3$ alors la matrice de l'homothétie vectorielle h_λ de rapport λ

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & h_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \end{array}$$

est la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\boxed{Mat(h_\lambda, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \lambda I_3}$$

7.2.4 Matrice de l'application linéaire classique de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2

Soit \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = \{(1;0); (0;1)\}$ alors l'endomorphisme f

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (ax + by, cx + dy) \end{array}$$

a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\boxed{Mat(f, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

7.2.5 Matrice de l'application linéaire classique de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3

Soit \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = \{(1;0;0); (0;1;0); (0;0;1)\}$ alors l'endomorphisme k

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & k(x,y,z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz) \end{array}$$

a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\boxed{Mat(k, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}$$

8 Matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une autre base \mathcal{B}'

8.1 Définition

Soit l'espace vectoriel \vec{E} de dimension finie n munie de deux bases :
 une **ancienne base** notée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de \vec{E} .
 et une **nouvelle base** $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$.

$$\begin{aligned} Id : (E, \mathcal{B}') &\longrightarrow (E, \mathcal{B}) \\ \vec{e}'_1 &\longmapsto Id(\vec{e}'_1) = \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 &\longmapsto Id(\vec{e}'_2) = \vec{e}_2 \\ \dots &\dots \\ \vec{e}'_n &\longmapsto Id(\vec{e}'_n) = \vec{e}_n \end{aligned}$$

- **Attention!!!** La matrice de passage de l'ancienne base \mathcal{B} à la nouvelle base \mathcal{B}' est par définition la matrice de l'Id relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} dans cet ordre.

$$P = Mat(Id, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} Id(\vec{e}'_1) & Id(\vec{e}'_2) & \dots & Id(\vec{e}'_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix} \text{ est inversible}$$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \dots & \vec{e}'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

et P^{-1} est donc la matrice de passage de la nouvelle base \mathcal{B}' à l'ancienne base \mathcal{B} .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vdots \\ \vec{e}'_n \end{matrix}$$

- Si on note X la matrice colonne des coordonnées de \vec{u} dans la base \mathcal{B}
- Si on note X' la matrice colonne des coordonnées de \vec{u} dans la base \mathcal{B}'

$$X = PX' \text{ et } X' = P^{-1}X$$



8.2 Exemple 1

Soit l'espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et soit la nouvelle base $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ avec

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

Ecrire les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'un vecteur \vec{u} dans la base \mathcal{B}' en fonction de ses composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

1. Méthode 1 :

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$$

$$\text{donc } x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}_1 + y'(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

$$\text{Par conséquent, } x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x' - 2y')\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2.$$

A cause de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on a donc :

$$\begin{cases} x' - 2y' = x \\ y' = y \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x' - 2y = x \\ y' = y \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \end{cases}$$

2. Méthode 2 :

La matrice de passage de l'ancienne base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ vers la nouvelle base $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ est la matrice P dont les vecteurs colonnes représentent les coordonnées \mathcal{B}' de la nouvelle base dans l'ancienne base \mathcal{B} :

$$P = \begin{pmatrix} Id(\vec{e}'_1) & Id(\vec{e}'_2) \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$P \text{ est inversible car } \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ donc } P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}X = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix}$$

8.3 Exemple 2

Soit l'espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et soit la nouvelle base $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ avec

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 \end{cases}$$

Ecrire les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'un vecteur \vec{u} dans la base \mathcal{B}' en fonction de ses composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

1. Méthode 1 :

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$$

$$\text{donc } x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'(2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) + y'(\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2).$$

$$\text{Par conséquent, } x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (2x' + y')\vec{e}_1 + (5x' + 7y')\vec{e}_2.$$

A cause de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on a donc :

$$\begin{cases} 2x' + y' = x \\ 5x' + 7y' = y \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 14x' + 7y' = 7x \\ -5x' - 7y' = -y \end{cases}$$

$$\text{d'où } 9x' = 7x - y \text{ d'où } x' = \frac{7x - y}{9}. \text{ On en déduit que } y' = x - 2x' = x - 2\frac{7x - y}{9} = \frac{9x - 14x + 2y}{9} = \frac{-5x + 2y}{9}$$

2. Méthode 2 :

$$P = \begin{pmatrix} Id(\vec{e}'_1) & Id(\vec{e}'_2) \\ 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$P \text{ est inversible car } \det(P) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \text{ donc } P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}X = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(7x - y) \\ \frac{1}{9}(-5x + 2y) \end{pmatrix}$$

8.4 Matrice de passage dans $\mathbb{C}[X]$ entre la base \mathcal{L} des polynômes interpolateurs de Lagrange et la base canonique \mathcal{B}

Soit une famille de $(n + 1)$ scalaires complexes $\mathcal{F} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Soit la famille $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à cette famille \mathcal{F} .

Alors

- $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$
- Tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$
- La matrice de passage de la base \mathcal{L} vers la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & X & \dots & X^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix}$$

$$P = \text{Mat}(id, \mathcal{B}, \mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice de Vandermonde

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

8.5 Equivalence de matrices

Deux matrices A et B éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites **équivalentes** lorsque

$$\exists P \text{ inversible d'ordre } n \quad \exists Q \text{ inversible d'ordre } p \text{ telles que } A = P B Q$$

c'est-à-dire

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \exists Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ telles que } A = P B Q$$

8.6 Similitude de matrices

8.6.1 Définition

Deux matrices carrées A et B sont dites **semblables** lorsqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes \mathcal{B} et \mathcal{B}' , c'est-à-dire lorsque

$$\exists P \text{ inversible telle que } B = P A P^{-1}$$

ou encore

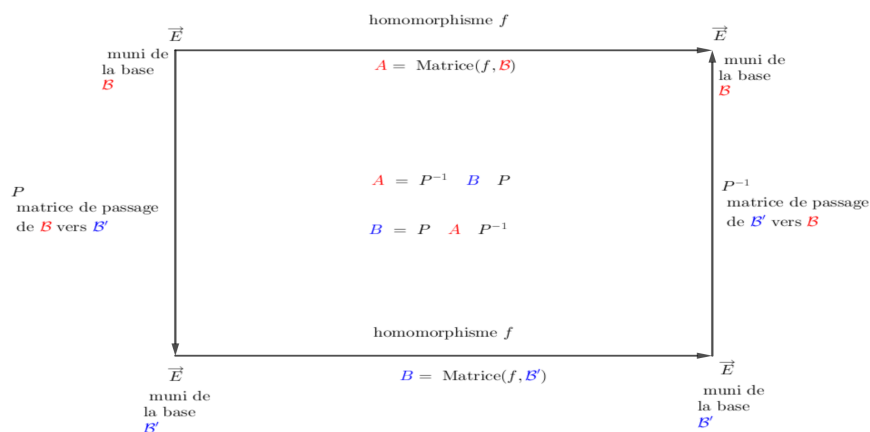
$$\exists P \text{ inversible telle que } A = P^{-1} B P$$

Bien entendu, on a aussi :

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A = P^{-1} B P$$

où la matrice P représente la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

On peut représenter cette similitude de matrices par le schéma suivant :



8.7 Rang d'une matrice

8.7.1 Définition

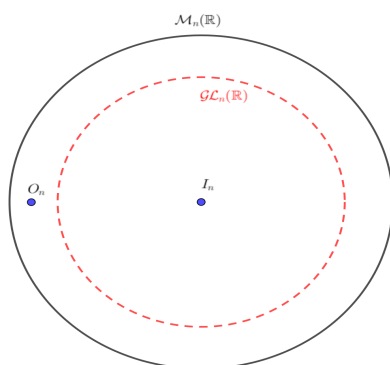
Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire qui lui est canoniquement associée, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u))$.
autrement dit, $\text{rang}(A)$ est le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A

8.7.2 Propriété

Dans le cas d'une matrice carrée (c'est-à-dire $n = p$)

$$\text{rang}(A) = n \iff A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.



8.7.3 Rang d'une matrice

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Corrigé - méthode 1

1. A est une matrice de format $(4, 5)$ donc $\text{rang}(A) \leq \min(4, 5) = 4$.
2. Si l'on trouve au moins un déterminant d'ordre 4 extrait de cette matrice qui est non nul alors $\text{rang}(A) = 4$.

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ & \bullet \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \text{ donc } \boxed{\text{rang}(A) = 4}. \end{aligned}$$

Corrigé - méthode 2

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, en notant c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 les vecteurs colonnes de cette matrice

On remplace $c_2 \leftarrow c_2 - 7c_1$; $c_3 \leftarrow c_3 - 5c_1$; $c_4 \leftarrow c_4 - 3c_1$; $c_5 \leftarrow c_5 + 2c_1$

on obtient que A a même rang que la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -16 & -6 & -6 & 5 \\ 3 & -22 & -8 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

Comme A' a deux colonnes identiques alors A' a même rang que $A'' = (c_1, c_2, c_3, c_5)$ qui a donc

même rang que $\left(c_1, \frac{1}{2}c_2, \frac{1}{2}c_3, c_5\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & -3 & 5 \\ 3 & -11 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

qu'on réarrange en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -8 & 5 \\ 3 & -4 & -11 & 9 \end{pmatrix}$.

En faisant $c_3 \leftarrow c_3 - 2c_2$ cette matrice a même rang que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Or $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = -23 \neq 0$ donc $\boxed{\text{rang}(A) = 4}$

8.7.4 Exercice

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer le rang de la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

- A est une matrice carrée d'ordre 3 donc $\text{rang}(A) \leq 3$.
- Comme $A \neq O$ alors $\text{rang}(A) > 0$
- \diamond En remplaçant $c_2 \leftarrow c_2 - c_1$ on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1 \\ b+c & c+a-(b+c) & a+b \\ bc & ca-bc & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b+c & a-b & a+b \\ bc & c(a-b) & ab \end{vmatrix}$$
- \diamond En remplaçant $c_3 \leftarrow c_3 - c_1$ on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ b+c & a-b & a+b-(b+c) \\ bc & c(a-b) & ab-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}$$
- \diamond En développant selon la première ligne l_1 on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a-b & a-c \\ c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = b(a-b)(a-c) - c(a-b)(a-c)$$

Donc $\det(A) = (a-b)(a-c)((b-c))$
- \diamond ou bien a, b, c sont distincts deux à deux alors $\det(A) \neq 0$ et donc $\text{rang}(A) = 3$
- \diamond ou bien $a = b \neq c$ alors $\det(A) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+c & c+a & a+a \\ ac & ca & a^2 \end{pmatrix}$ et $\text{rang}(A) = 2$
car $c_1 = c_2 \neq c_3$
- \diamond ou bien $a = c \neq b$ alors $\det(A) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & a+a & a+b \\ ba & a^2 & ab \end{pmatrix}$ et $\text{rang}(A) = 2$
car $c_1 = c_3 \neq c_2$
- \diamond ou bien $b = c \neq a$ alors $\det(A) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+b & b+a & a+b \\ b^2 & ba & ab \end{pmatrix}$ et $\text{rang}(A) = 2$
car $c_2 = c_3 \neq c_1$
- \diamond ou bien $a = b = c$ alors $\det(A) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+a & a+a & a+a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ et $\text{rang}(A) = 1$
car $c_1 = c_2 = c_3$

8.7.5 Propriété

Si $u \in \mathcal{L}(E;F)$ et $v \in \mathcal{L}(F;G)$ alors $\text{rang}(v \circ u) \leq \min(\text{rang}(u), \text{rang}(v))$

$$E \xrightarrow{u} \text{Im}(u) = u(E) \subset F \xrightarrow{v} \text{Im}(v \circ u) = v(u(E)) \subset G$$

- ◇ Une base de $u(E) = \text{Im}(u)$ est formée d'au plus $\text{rang}(u)$ vecteurs.
 - ◇ Une base de $v(F) = \text{Im}(v)$ est formée d'au plus $\text{rang}(v)$ vecteurs. Or $\text{Im}(v \circ u) = v(u(E)) \subset v(F)$ donc $\text{rang}(v \circ u) = \dim(\text{Im}(v \circ u)) \leq \text{rang}(v)$ vecteurs.
 - ◇ De plus, une base de $v(u(E))$ ne peut avoir plus de vecteurs que n'en contient une base de $u(E)$ qui ne peut en avoir plus de $\text{rang}(u)$ donc $\text{rang}(v \circ u) \leq \text{rang}(u)$ vecteurs
- Par conséquent, $\text{rang}(v \circ u) \leq \min(\text{rang}(u), \text{rang}(v))$

8.7.6 Corollaire

Si u et v sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n alors

$$\text{rang}(u) + \text{rang}(v) - n \leq \text{rang}(v \circ u) \leq \min(\text{rang}(u), \text{rang}(v))$$

- ◇ On a démontré précédemment que $\text{rang}(v \circ u) \leq \min(\text{rang}(u), \text{rang}(v))$.
- ◇
- ◇ Donc $\text{rang}(u) + \text{rang}(v) - n \leq \text{rang}(v \circ u) \leq \min(\text{rang}(u), \text{rang}(v))$

8.8 Rang d'une somme d'endomorphismes

Soient u et v des endomorphismes de E de dimension finie.

Démontrer que $|\text{rang}(u) - \text{rang}(v)| \leq \text{rang}(u+v) \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$.

8.8.1 Corrigé

- $\text{Im}(u+v) = (u+v) \langle E \rangle \subset u \langle E \rangle + v \langle E \rangle = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$
Par conséquent, $\text{rang}(u+v) = \dim(\text{Im}(u+v)) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v))$.
Or $\dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v))$.
Donc $\text{rang}(u+v) \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$ (*) CQFD.
- En utilisant cette propriété (*) nous avons $\text{rang}(u+v-v) \leq \text{rang}(u+v) + \text{rang}(-v)$
donc $\text{rang}(u) \leq \text{rang}(u+v) + \text{rang}(v)$
d'où $\text{rang}(u) - \text{rang}(v) \leq \text{rang}(u+v)$ (**).
- On réutilise cette propriété (*) de la façon suivante :
 $\text{rang}(v+u-u) \leq \text{rang}(v+u) + \text{rang}(-u)$ d'où $\text{rang}(v) \leq \text{rang}(u+v) + \text{rang}(u)$. On en déduit que $\text{rang}(v) - \text{rang}(u) \leq \text{rang}(u+v)$ (***)
- D'après (**) et (***) on obtient donc $|\text{rang}(u) - \text{rang}(v)| \leq \text{rang}(u+v)$ CQFD.

9 Exercices

9.1 Exercice

Démontrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = x - 2y$
2. $g : \mathbb{R}_2[X] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(P) = P(1)$
3. $h : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(P) = P^{(k)}(0)$
4. $\phi : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\phi(P) = XP' - 3P = x - 2y$
5. $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $\psi((x, y)) = (2x - y; x + 3y)$
6. $F : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $F(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt$

9.2 Exercice

Soient l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \phi((x, y)) = (x - y, y - x, 0) \end{aligned}$$

1. Démontrer qu'elle est linéaire
2. Déterminer $\ker(\phi)$ en précisant une base. ϕ est-elle injective ?
3. Déterminer $\text{Im}(\phi)$ en précisant une base. ϕ est-elle surjective ?

9.2.1 Corrigé

1. • Méthode 1 : d'après son expression analytique, ϕ est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .
• Méthode 2 : Soient $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :
$$\begin{aligned} \phi(\alpha\vec{u} + \vec{v}) &= \phi(\alpha(x, y) + (x', y')) = \phi((\alpha x, \alpha y) + (x', y')) = \phi((\alpha x + x', \alpha y + y')) \\ &= (\alpha x + x' - \alpha y - y', \alpha y + y' - \alpha x - x', 0) = (\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha x, 0) + (x' - y', y' - x', 0) \\ &= \alpha(x - y, y - x, 0) + (x' - y', y' - x', 0) = \alpha\phi((x, y)) + \phi(x', y') \\ &= \alpha\phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}) \text{ donc } \phi \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$
2. • $\vec{u} \in \ker(\phi) \iff \phi(\vec{u}) = \vec{0} \iff (x - y, y - x, 0) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) = x(1, 1)$
• Par conséquent, $\ker(\phi) = \text{Vect}((1, 1)) =$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F} = ((1, 1))$
• Comme cette famille est formée d'un seul élément $(1, 1)$ qui n'est pas le vecteur nul alors cette famille est libre.
• Cette famille étant génératrice et libre est donc une base de $\ker(\phi)$ qui est donc de dimension 1.
 $\ker(\phi)$ est la droite vectorielle de base $((1, 1))$
• Comme $\ker(\phi) \neq \{\vec{0}\}$ alors ϕ n'est pas injective donc n'est pas bijective.
3. • D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{Im}(\phi))$
donc $2 = 1 + \dim(\text{Im}(\phi))$. Par conséquent, $\text{Im}(\phi)$ est une droite vectorielle

- On sait que $Im(\phi)$ est engendré par les images par ϕ des vecteurs de la base de l'espace vectoriel de départ.
Or \mathbb{R}^2 a pour base, la base canonique $\mathcal{B} = ((1,0), (0,1))$
donc $Im(\phi) = Vect(\phi((1,0)), \phi((0,1))) = Vect((1, -1, 0); (-1, 1, 0))$
Mais ces deux vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(-1, 1, 0)$ sont liés donc $Im(\phi) = Vect((1, -1, 0))$.
La famille formée du seul élément $(1, -1, 0)$ qui n'est pas le vecteur nul est donc libre et devient alors une base de $Im(\phi)$.
- Comme l'on sait que $Im(\phi)$ est une droite vectorielle alors $Im(\phi)$ a pour base $(-1, 1, 0)$
- Comme $Im(\phi) \neq \vec{F} = \mathbb{R}^3$ alors ϕ n'est pas surjective.

9.3 Exercice

Soient l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \phi((x, y, z)) = (x - y, y - z, z - x) \end{aligned}$$

1. Démontrer qu'elle est linéaire
2. Déterminer $\ker(\phi)$ en précisant une base. ϕ est-elle injective ?
3. Déterminer $\text{Im}(\phi)$ en précisant une base. ϕ est-elle surjective ?

9.3.1 Corrigé

1.
 - Méthode 1 : d'après son expression analytique, ϕ est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .
 - Méthode 2 : Soient $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $\vec{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\vec{u} + \vec{v}) &= \phi(\alpha(x, y, z) + (x', y', z')) = \phi((\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (x', y', z')) \\ &= \phi((\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')) \\ &= (\alpha x + x' - \alpha y - y', \alpha y + y' - \alpha z - z', \alpha z + z' - \alpha x - x') \\ &= (\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha z, \alpha z - \alpha x) + (x' - y', y' - z', z' - x') \\ &= \alpha(x - y, y - z, z - x) + (x' - y', y' - z', z' - x') = \alpha\phi((x, y, z)) + \phi(x', y', z') \\ &= \alpha\phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}) \text{ donc } \phi \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$
2.
 - $\vec{u} \in \ker(\phi) \iff \phi(\vec{u}) = \vec{0} \iff (x - y, y - z, z - x) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$
 - $\iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases} \iff (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$
 - Par conséquent, $\ker(\phi) = \text{Vect}((1, 1, 1)) =$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F} = ((1, 1, 1))$
 - Comme cette famille est formée d'un seul élément $(1, 1, 1)$ qui n'est pas le vecteur nul alors cette famille est libre.
 - Cette famille étant génératrice et libre est donc une base de $\ker(\phi)$ qui est donc de dimension 1.
 - $\ker(\phi)$ est la droite vectorielle de base $((1, 1, 1))$
 - Comme $\ker(\phi) \neq \{\vec{0}\}$ alors ϕ n'est pas injective donc n'est pas bijective.
3.
 - D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{Im}(\phi))$ donc $3 = 1 + \dim(\text{Im}(\phi))$. Par conséquent, $\text{Im}(\phi)$ est un plan vectoriel.
 - On sait que $\text{Im}(\phi)$ est engendré par les images par ϕ des vecteurs de la base de l'espace vectoriel de départ.
Or \mathbb{R}^3 a pour base, la base canonique $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$
donc $\text{Im}(\phi) = \text{Vect}(\phi((1, 0, 0)), \phi((0, 1, 0)), \phi((0, 0, 1))) = \text{Vect}((1, 0, -1); (-1, 1, 0); (0, -1, 1))$
Mais cette famille n'est pas libre car
 $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$
 $\alpha(1, 0, -1) + \beta(-1, 1, 0) + \gamma(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$
 $\implies (\alpha - \beta, \beta - \gamma, -\alpha + \gamma) = (0, 0, 0) \implies \alpha = \beta = \gamma$
Ils ne sont pas forcément tous nuls simultanément.
Par contre, les deux vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(-1, 1, 0)$ sont libres car

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha(1, 0, -1) + \beta(-1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\implies (\alpha - \beta, \beta, -\alpha) = (0, 0, 0) \implies \alpha = \beta = 0$$

La famille formée deux vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(-1, 1, 0)$ est libre et devient alors une base de $\text{Im}(\phi)$.

- Comme l'on sait que $\text{Im}(\phi)$ est un plan vectoriel alors $\text{Im}(\phi)$ a pour base $(1, 0, -1)$ et $(-1, 1, 0)$
- Comme $\text{Im}(\phi) \neq \vec{F} = \mathbb{R}^3$ alors ϕ n'est pas surjective.

9.4 Exercice

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes d'une variable réelle et de degré inférieur ou égal à 2.

1. Donner sans justification la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto \phi(P) = Q \end{aligned}$$

défini par

$$Q(X) = P(X+1) - P(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}$$

- (a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
- (b) Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (c) Déterminer $\ker(\phi)$. ϕ est-elle injective ?
- (d) Déterminer $\text{Im}(\phi)$. ϕ est-elle surjective ?

9.4.1 Corrigé

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes d'une variable réelle et de degré inférieur ou égal à 2.

1. $\mathbb{R}_2[X]$ est formé des :

- des polynômes de degré 2 : les trinômes $aX^2 + bX + c$ où $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
- des polynômes de degré 1 : les binômes $bX + c$ où $b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$
- des polynômes de degré 0 : les constantes non nulles C où $C \in \mathbb{R}^*$
- du seul polynôme de degré ∞ : le polynôme nul O

Par conséquent, $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$.

La base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

2. Soit l'application ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme $Q = \phi(P)$ défini par $Q(X) = P(X+1) - P(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad Q(X) &= P(X+1) - P(X) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c \\ Q(X) &= 2aX + a + b \text{ de degré } \leq 1 \text{ donc } Q \in \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

- (b) ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ car $\forall \alpha_1 \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall P_1 \in \mathbb{R}_2[X] \quad \forall P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$
on a $\phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \phi(P_1) + \alpha_2 \phi(P_2)$.

En effet,

- $\phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = Q$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(X) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)(X+1) - (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)(X)$
- $\alpha_1 \phi(P_1) + \alpha_2 \phi(P_2) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R} \quad (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2)(X) = \alpha_1 Q_1(X) + \alpha_2 Q_2(X)$
 $= \alpha_1 (P_1(X+1) - P_1(X)) + \alpha_2 (P_2(X+1) - P_2(X))$
 $= \alpha_1 P_1(X+1) - \alpha_1 P_1(X) + \alpha_2 P_2(X+1) - \alpha_2 P_2(X) = R(X)$
- On a bien $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(X) = R(X)$ donc $Q = R$ d'où $\phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \phi(P_1) + \alpha_2 \phi(P_2)$. **CQFD.**

- (c) Pour déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit de déterminer les images $\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)$

- $\phi(1) = Q_1$ tel que $\forall X \in \mathbb{R} \quad Q_1(X) = UN(X+1) - UN(X) = 1 - 1 = 0$
donc $\phi(1) = O$
- $\phi(X) = Q_2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R} \quad Q_2(X) = Id(X+1) - Id(X) = X+1 - X = 1$
donc $\phi(X) = 1$
- $\phi(X^2) = Q_3$ tel que $\forall X \in \mathbb{R} \quad Q_3(X) = (X+1)^2 - (X)^2$
 $= X^2 + 2X + 1 - X^2 = 2X + 1$ donc $\phi(X^2) = 2X + 1$

Par conséquent, la matrice de ϕ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$\begin{pmatrix} \phi(1) & \phi(X) & \phi(X^2) \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

(d) i. Déterminons le noyau $\ker(\phi)$.

- Méthode 1 :

Soit P tel que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Alors

$$P \in \ker(\phi) \iff \phi(P) = \Theta \iff \forall X \in \mathbb{R} \quad P(X+1) - P(X) = 0$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R} \quad a(X+1)^2 + b(X+1) + c - (aX^2 + bX + c) = 0$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R} \quad a(X^2 + 2X + 1) + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c = 0$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R} \quad 2aX + a + b = 0 \iff 2a = 0 \text{ et } a + b = 0$$

$$\iff a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

- Méthode 2 :

$$P \in \ker(\phi) \iff \phi(P) = \Theta \iff \forall X \in \mathbb{R} \quad P(X+1) - P(X) = 0$$

Par conséquent, $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = \dots$ donc le polynôme $Q = P - P(0)$ est de degré inférieur ou égal à 2 ayant une infinité de racines distinctes donc $Q = O$ d'où $\exists c = P(0) \quad P = c$

- Par conséquent, $\boxed{\ker(\phi) = \{X \mapsto c/c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[X]}$. C'est l'ensemble formé des polynômes constants dont le polynôme nul.

$\ker(\phi) = \vec{D}_{UN}$ la droite vectorielle de base (UN) car :

— (UN) est une famille génératrice de $\ker(\phi)$ puisque $\forall c \in \mathbb{R} \quad c = c \cdot 1$

— (UN) est libre car $UN \neq \Theta$

ii. Comme $\dim(\ker(\phi)) = 1$ alors $\ker(\phi) \neq \{\vec{0}\}$ donc ϕ n'est pas injective.

(e) • $\dim(\ker(\phi)) = 1$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{Im}(\phi)) \text{ donc } 3 = 1 + \dim(\text{Im}(\phi))$$

$$\text{donc } \dim(\text{Im}(\phi)) = 2$$

- $\text{Im}(\phi)$ est donc un plan vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F} = (\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)) = (O, 1, 2X+1) = (1, 2X+1)$.
- Cette famille \mathcal{F} est libre car c'est une famille génératrice de 2 vecteurs dans un sous-espace vectoriel de dimension 2.
- Donc \mathcal{F} est une base de $\text{Im}(\phi)$

Par conséquent $\boxed{\text{Im}(\phi) = \vec{P}_{(1, 2X+1)}}$.

Comme $\text{Im}(\phi) \neq \mathbb{R}_2[X]$ alors ϕ n'est pas surjective.

9.5 Exercice Essec 08 ecs

Soit l'espace vectoriel \mathcal{P} des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On désigne par \mathcal{P}_r le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales polynômes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à r .

Étant donné $Q \in \mathcal{P}$, on se propose de déterminer toutes les fonctions polynomiales P vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x+1) - P(x) = Q(x)$$

A cet effet, on introduit l'application Δ de \mathcal{P} dans \mathcal{P} définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(x) = P(x+1) - P(x)$$

- (a) Démontrer que Δ est un endomorphisme de \mathcal{P}
(b) Soit $P \in \mathcal{P}$ de degré $r > 0$, calculer le degré de la fonction polynomiale $\Delta(P)$.
(c) Démontrer que $\ker(\Delta)$ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.
2. On considère pour $r \in \mathbb{N}^*$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \Delta_r : \mathcal{P}_r & \longrightarrow & \mathcal{P}_r \\ P & \longmapsto & \Delta(P) \end{array}$$

- Justifier la définition de Δ_r et montrer qu'elle est linéaire
- Quel est le noyau de Δ_r ?
- Montrer alors que $\text{Im}(\Delta_r) = \mathcal{P}_{r-1}$
- En déduire que l'application Δ est surjective

9.5.1 Corrigé

9.6 Exercice

Soit $n \geq 1$. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit l'application

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto f(P) = P + (1 - X)P' \end{aligned}$$

- Démontrer que f est un endomorphisme de E
- Déterminer $\ker(f)$ puis $\text{Im}(f)$. f est-elle injective? f est-elle surjective?

9.6.1 Corrigé

- $\forall P \in E \quad f(P) \in E$ car $d(f(P)) \leq n$ puisque $d(P) \leq n$ et $d((1 - X)P') \leq n$ car $d(1 - X) = 1$ et $d(P') \leq n - 1$
 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. soient $(P, Q) \in E^2$ alors
 $f(\alpha P + Q) = \alpha P + Q + (1 - X)[\alpha P + Q]' = \alpha P + Q + (1 - X)[\alpha P' + Q']$
 $= \alpha(P + (1 - X)P') + Q + (1 - X)Q' = \alpha f(P) + f(Q)$
donc f est un endomorphisme de E

$$2. (a) P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \ker(f) \iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + (1 - X) \left(\sum_{k=0}^n k a_k X^{k-1} \right) = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + \sum_{k=0}^n k a_k X^{k-1} - \sum_{k=0}^n k a_k X^k = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + \sum_{k=0}^n k a_k X^{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} k a_k X^k + n a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k) a_k X^k + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} + (1 - n) a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k) a_k X^k + \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1) a_{j+1} X^j + (1 - n) a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k) a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) a_{k+1} X^k + (1 - n) a_n X^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} [(1 - k) a_k + (k + 1) a_{k+1}] X^k + (1 - n) a_n X^n = 0$$

$$\begin{cases} (1 - k) a_k + (k + 1) a_{k+1} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n - 1 \\ (1 - n) a_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \\ -2a_3 + 4a_4 = 0 \\ \vdots \\ -n a_{n-1} + n a_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_k = 0 \text{ pour tout } k \geq 2 \\ a_0 + a_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}(1 - X)$ qui est une droite vectorielle.

Comme $\dim(\ker(f)) = 1$ alors $\ker(f) \neq \{\vec{0}\}$ donc f n'est pas injective.

- D'après la formule du rang, on sait que $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = n - 1$.

$Im(f)$ est engendré par $(f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^n))$.
Or $f(1) = f(X)$ donc $Im(f)$ est engendré par les $f(X^k) = kX^{k-1} + (1-k)X^k$ qui
sont linéairement indépendantes donc forment une base de $Im(f)$.
Comme $Im(\phi) \neq \mathbb{R}^n[X]$ alors ϕ n'est pas surjective.

9.7 Exercice

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2.

1. Donner sans justification la base canonique \mathcal{B} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe le polynôme $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = PM$

(a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Déterminer $\ker(\phi)$ puis $\text{Im}(\phi)$

9.7.1 Corrigé

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2.

1. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 et la base canonique \mathcal{B} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$\mathcal{B} = (E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe la matrice $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = PM$

(a) ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$\text{on a } \phi(\alpha M + \beta N) = \alpha \phi(M) + \beta \phi(N).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha M + \beta N) &= P(\alpha M + \beta N) = P(\alpha M) + P(\beta N) = \alpha(PM) + \beta(PN) \\ &= \alpha \phi(M) + \beta \phi(N) \end{aligned}$$

(b) Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\bullet \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\bullet \phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\bullet \phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\bullet \phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\text{Or } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,1}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,2}$$

Donc la matrice de ϕ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (c) • $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(\phi) \iff \phi(M) = O \iff PM = O$
- $$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\iff a+c=0 \text{ et } b+d=0 \iff a=-c \text{ et } b=-d$$
- Donc $\ker(\phi) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$
- $\ker(\phi)$ est donc le sous espace vectoriel engendré par la famille $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$ qui est une base car elle est libre.
En effet, $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0$ Donc $\ker(\phi)$ est le plan vectoriel $\vec{P}_{(C,D)}$ de base (C, D) où $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 - D'après le théorème du rang, $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{Im}(\phi))$ donc $4 = 2 + \dim(\text{Im}(\phi))$ donc $\dim(\text{Im}(\phi)) = 2$.
 - Par conséquent, $\text{Im}(\phi)$ est le plan vectoriel engendré par la famille $(\phi(E_{1,1}), \phi(E_{1,2}), \phi(E_{2,1}), \phi(E_{2,2})) = (A, B, A, B) = (A, B)$
Cette famille génératrice de 2 éléments dans un sous-espace vectoriel de dimension 2 est donc libre et est donc une base de ce sous-espace vectoriel.
 - $\text{Im}(\phi)$ est le plan vectoriel $\vec{P}_{(A,B)}$ de base $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$

9.8 Exercice 3

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2. Soient A une matrice fixée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe le polynôme $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = MA - AM$

1. (a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 (b) Déterminer $\ker(\phi)$.
 (c) Démontrer que $A \in \ker(\phi)$ et que $I \in \ker(\phi)$.
 (d) Démontrer que si $B \in \ker(\phi)$ et si $C \in \ker(\phi)$ alors $BC \in \ker(\phi)$
2. On suppose dorénavant que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 - (a) Calculer $\phi(M)$ et déterminer c et d en fonction de a et de b pour que $\phi(M) = 0$
 - (b) Montrer que $\ker(\phi)$ est l'ensemble des matrices de la forme $aI + bA$
 - (c) Déterminer une base de $\ker(\phi)$ et préciser la dimension de $\ker(\phi)$
 - (d) Si $K \in \ker(\phi)$ on pose $K^0 = I$ et $\forall n \geq 1 \quad K^n = K^{n-1} \times K$.
 Démontrer que $K^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$
 puis déterminer K^n par récurrence.
 - (e) Déterminer les matrices K telles que $K^2 = I$

9.8.1 Corrigé

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2. Soient A une matrice fixée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe la matrice $\phi(M)$ défini par $\phi(M) = MA - AM$

1. (a) ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car
 $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 on a $\phi(\alpha M + \beta N) = \alpha\phi(M) + \beta\phi(N)$.
 En effet,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha M + \beta N) &= (\alpha M + \beta N)A - A(\alpha M + \beta N) \\ &= (\alpha M)A + (\beta N)A - A(\alpha M) - A(\beta N) \\ &= \alpha(MA) + \beta(NA) - \alpha(AM) - \beta(AN) = \alpha(MA - AM) + \beta(NA - AN) \\ &= \alpha\phi(M) + \beta\phi(N) \end{aligned}$$
 - (b) $M \in \ker(\phi) \iff \phi(M) = O \iff MA - AM = O \iff MA = AM$
 Donc $\ker(\phi)$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec A .
 - (c) $A \in \ker(\phi)$ car $AA = AA$ et $I \in \ker(\phi)$ car $AI = IA$ puisque $AI = A$ et $IA = A$.
 - (d) Si $B \in \ker(\phi)$ et si $C \in \ker(\phi)$ alors $BA = AB$ et $CA = AC$ donc $(BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = (AB)C = A(BC)$ donc $BC \in \ker(\phi)$
2. On suppose dorénavant que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- (a) i. $\phi(M) = MA - AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a+b-d \\ -c & c \end{pmatrix}$
- ii. $\phi(M) = O \iff \begin{pmatrix} -c & a+b-d \\ -c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff c = 0 \text{ et } a+b = d$
- (b) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(\phi) \iff \phi(M) = O \iff c = 0 \text{ et } a+b = d$
 $\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI + bA$ Par conséquent, $\ker(\phi)$ est l'ensemble des matrices de la forme $aI + bA$
- (c) i. $\ker(\phi)$ est donc le sous espace vectoriel engendré par la famille (I, A)
- ii. Cette famille est-elle libre? Oui car :
 $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0$
- iii. Par conséquent $\ker(\phi)$ a pour base (I, A) .
C'est donc le plan vectoriel $\vec{P}_{(I,A)}$ de base (I, A) . Sa dimension est 2
- (d) Si $K \in \ker(\phi)$ on pose $K^0 = I$ et $\forall n \geq 1 \quad K^n = K^{n-1} \times K$.

i. Comme $K \in \ker(\phi)$ alors $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad K = aI + bA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$
donc $K^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+ba+b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$

ii. Démontrons par récurrence que $K^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$

- étape 1 : initialisation en $n = 0$.

On a bien $\begin{pmatrix} a^0 & (a+b)^0 - a^0 \\ 0 & (a+b)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et $K^0 = I$

donc $K^0 = \begin{pmatrix} a^0 & (a+b)^0 - a^0 \\ 0 & (a+b)^0 \end{pmatrix}$ par conséquent la propriété est vraie au rang $n = 0$

- étape 2 : hérédité. Soit un certain $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $K^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$

alors $K^{n+1} = K^n \times K = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n a & a^n b + [(a+b)^n - a^n](a+b) \\ 0 & (a+b)^n(a+b) \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} a^{n+1} & (a+b)^{n+1} - a^{n+1} \\ 0 & (a+b)^{n+1} \end{pmatrix}$

- Conclusion : cette propriété étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel n . CQFD.

(e) $K^2 = I \iff \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ (a+b)^2 - a^2 = 0 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases}$
 $\iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ a+b = 1 \text{ ou } a+b = -1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ 1 + b = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ 1 + b = -1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ -1 + b = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ -1 + b = -1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les matrices K solutions de $K^2 = I$ sont donc :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } K = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.9 Même représentation matricielle dans deux bases différentes

Soit P un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit f un endomorphisme de P telle que matrice

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit un vecteur non nul $u = ae_1 + be_2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Peut-on trouver un vecteur $v = ce_1 + de_2$ tel que $\mathcal{B}' = (u, v)$ soit une base de P et que

$$M(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}?$$

9.9.1 Corrigé

$$(u, v) \text{ est une base de } P \text{ et } M(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0 \text{ et } \begin{cases} f(u) = -u + 2v \\ f(v) = u + 4v \end{cases}$$

$$\iff \det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0 \text{ et } \begin{cases} af(e_1) + bf(e_2) = -(ae_1 + be_2) + 2(ce_1 + de_2) \\ cf(e_1) + df(e_2) = ae_1 + be_2 + 4(ce_1 + de_2) \end{cases}$$

$$\iff \det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0 \text{ et } \begin{cases} a(-e_1 + 2e_2) + b(e_1 + 4e_2) = -(ae_1 + be_2) + 2(ce_1 + de_2) \\ c(-e_1 + 2e_2) + d(e_1 + 4e_2) = ae_1 + be_2 + 4(ce_1 + de_2) \end{cases}$$

$$\iff \det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0 \text{ et } \begin{cases} (-a + b)e_1 + (2a + 4b)e_2 = (-a + 2c)e_1 + (b + d)e_2 \\ (-c + d)e_1 + (2c + 4d)e_2 = (a + 4c)e_1 + (b + 4d)e_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0 \text{ et } \begin{cases} -a + b = -a + 2c \\ 2a + 4b = -b + 2d \\ -c + d = a + 4c \\ 2c + 4d = b + 4d \end{cases}$$

$$\iff ad - bc \neq 0 \text{ et } \begin{cases} c = \frac{b}{2} \\ d = a + \frac{5}{2}b \end{cases}$$

$$\iff ad - bc \neq 0 \text{ et } v \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ a + \frac{5}{2}b \end{pmatrix}$$

9.10 Endomorphisme nilpotent - Paris C 77

Soit E un espace vectoriel réel. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = e_2 + e_3$; $f(e_2) = -e_1 + e_3$; $f(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$

1. Déterminer $\ker(f)$ puis déterminer $\text{Im}(f)$.
On précisera une base pour chacun de ces deux sous espaces vectoriels.
2. Déterminer $f(\text{Im}(f))$ et le comparer au noyau $\ker(f)$.
3. Déterminer alors $f^3 = f \circ f \circ f$

9.10.1 Corrigé

La matrice de f dans la base \mathcal{B} est $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$1. u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(u) = 0$$

$$\iff \begin{cases} -y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff u = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\ker(f)$ est la droite vectorielle de base $v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\text{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
D'après le théorème du rang, comme $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ alors $3 = 1 + \dim(\text{Im}(f))$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Par conséquent, $\text{Im}(f)$ est un plan vectoriel.
Or $f(e_3) = \frac{1}{2}f(e_1) - \frac{1}{2}f(e_2)$ donc la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est liée. Mais la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre. On en déduit que $\text{Im}(f)$ est le plan vectoriel de base $(f(e_1), f(e_2))$.
3. • $f(\text{Im}(f))$ est le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f(f(e_1)), f(f(e_2)))$
 - Or $(f(f(e_1))) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3 = v$
 - et $(f(f(e_2))) = f(-e_1 + e_3) = -f(e_1) + f(e_3) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - e_3 = -v$

Par conséquent, $f(\text{Im}(f))$ est la droite vectorielle de base v : c'est donc le noyau $\ker(f)$.
4. Alors $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'application linéaire nulle Θ car
 $\forall u \in E \quad f^3(u) = f(f(f(u))) = 0$ car $f(f(u)) \in f(\text{Im}(f))$ et $f(\text{Im}(f)) = \ker(f)$.

9.11 Endomorphisme nilpotent d'indice n dans un espace vectoriel de dimension n

Soit n un entier ≥ 2 . Soit f un endomorphisme de E de dimension n tel que $f^n = \theta$ et $f^{n-1} \neq \theta$.
Démontrer que

- $\text{rang}(f) = n - 1$ c'est-à-dire que $\text{Im}(f)$ est un hyperplan
- $\dim(\text{ker}(f)) = 1$

Comme $f^{n-1} \neq \theta$ alors $\exists x_0 \in E$ $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

Soit $\mathcal{B} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$

Cette famille \mathcal{B} est libre car si $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i(x_0) = 0$ alors $f^{n-1}[\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i(x_0)] = f^{n-1}(0) = 0$

Donc $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \sum_{i=0}^n \lambda_i f^{i-1}(f^n(x_0)) = 0$.

Or $f^n(x_0) = 0$ d'où $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0$ avec $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

On en déduit que $\lambda_0 = 0$.

En réitérant le même procédé $f^{n-2}[\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i(x_0)] = f^{n-1}(0) = 0$ on obtient $\lambda_1 = 0$.

On continue le même procédé on obtient ensuite $\lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{n-1} = 0$

La famille \mathcal{B} ayant n éléments et étant libre dans un espace vectoriel de dimension n est donc une base de E .

Alors la famille $\mathcal{B}' = \{f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)\}$ engendre $\text{Im}(f)$.

Mais comme $f^n(x_0) = 0$ donc cette famille \mathcal{B}' a $n - 1$ éléments.

En utilisant le procédé précédent, on démontre que cette famille \mathcal{B}' est libre donc

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = n - 1}$$

. $\text{Im}(f)$ est donc un hyperplan de E .

D'après le théorème du rang, on a donc

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = 1}$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'' = \{f^{n-1}(x_0), \dots, f^2(x_0), f(x_0), x_0\}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

9.12 Endomorphismes commutants

Soient u et v des endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.
Démontrer que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont tous deux stables par v .

9.12.1 Corrigé

1. $v(\ker(u)) \subset \ker(u)$?

Soit $y \in v(\ker(u))$ donc $\exists x \in \ker(u)$ $y = v(x)$. Alors $u(y) = u(v(x)) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(0)$ car $x \in \ker(u)$.

Par conséquent, $u(y) = v(0) = 0$ donc $y \in \ker(u)$. CQFD.

2. $v(\text{Im}(u)) \subset \text{Im}(u)$?

Soit $z \in v(\text{Im}(u))$ donc $\exists y \in \text{Im}(u)$ $z = v(y)$. Comme $y \in \text{Im}(u)$ $\exists x \in E$ $y = u(x)$.

Par conséquent, $z = v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ donc $z \in \text{Im}(u)$. CQFD.

9.13 L'homothétie vectorielle seul endomorphisme commutant avec tout autre endomorphisme

1. Soit u une homothétie vectorielle. Démontrer que $\forall v \in \mathcal{L}(E)$ $u \circ v = v \circ u$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall x \in E$ $(x, u(x))$ est liée.
Démontrer que u est une homothétie vectorielle.
3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathcal{L}(E)$ $u \circ v = v \circ u$.
Démontrer que u est une homothétie vectorielle.

9.13.1 Corrigé

1. Soit u une homothétie vectorielle c'est-à-dire $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $u = \lambda \text{id}_E$.

Alors $\forall x \in E$ $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \lambda v(x) = v(\lambda x)$ car v est une application linéaire.

Par conséquent, $\forall x \in E$ $(u \circ v)(x) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$.

On a donc démontré que $\forall v \in \mathcal{L}(E)$ $u \circ v = v \circ u$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall x \in E$ $(x, u(x))$ est liée donc $\forall x \in E$ $\exists \lambda_x \in K$ $u(x) = \lambda_x x$.

Soit un couple (x, y) d'éléments de E . Donc $u(x) = \lambda_x x$ et $u(y) = \lambda_y y$.

- ou bien (x, y) est libre.

Alors $u(x + y) = \lambda_{x+y} x + y$. Mais $u(x + y) = u(x) + u(y)$ car u est linéaire donc $\lambda_{x+y} x + y = \lambda_x x + \lambda_y y$.

Par conséquent, $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$. Or la famille (x, y) est libre.

Donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $(\lambda_{x+y} - \lambda_y) = 0$ d'où $\lambda_x = \lambda_y$

- ou bien (x, y) est liée.

— ou $x \neq 0$

Alors $y = \mu x$ et $u(\mu x) = \lambda_{\mu x}$. or $u(\mu x) = \mu u(x)$ car u est linéaire

donc $\lambda_{\mu x} x = \mu \lambda_x x$.

On obtient $[\lambda_{\mu x} - \mu \lambda_x]x = 0$ avec $x \neq 0$ donc $\lambda_{\mu x} - \mu \lambda_x = 0$ d'où $\lambda_{\mu x} = \mu \lambda_x$.

— ou $x = 0$

$u(x) = u(0) = 0 = \lambda 0$ pour n'importe quel λ

- dans tous les cas $\exists \lambda \in K$ $\forall x \in E$ $u(x) = \lambda x$ donc u est une homothétie vectorielle.

3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.

soit $x \in E$ et soit p un projecteur sur $\text{Vect}(x)$.

Alors $p(u(x)) = (p \circ u)(x) = (u \circ p)(x) = u(p(x)) = u(x)$ car $p(x) = x$ puisque $x \in \text{Vect}(x)$.

Par conséquent, $u(x) \in \text{Vect}(x)$ donc la famille $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in E$ donc u est une homothétie vectorielle.

9.14 Rang d'une matrice

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

9.14.1 Corrigé : Méthode 1

1. La matrice A est une matrice de format $(4, 3)$ donc $\text{rang}(A) \leq \min(4, 3) = 3$
2. Lorsque l'on examine les 3 vecteurs colonnes \vec{c}_1 ; \vec{c}_2 ; \vec{c}_3 , on constate que $\vec{c}_1 + 2\vec{c}_2 = \vec{c}_3$ donc cette famille de 3 vecteurs est liée donc $\text{rang}(A) < 3$
3. On cherche alors s'il y a un déterminant d'ordre 2 qui est non nul.

Un des déterminants d'ordre 2 est $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ donc la famille (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est libre

donc $\boxed{\text{rang}(A) = 2}$

9.14.2 Corrigé : Méthode 2

1. La matrice A est une matrice de format $(4, 3)$ donc $\text{rang}(A) \leq \min(4, 3) = 3$
2. On calcule tous les déterminants d'ordre 3 possibles :

$$\bullet \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Ils sont tous nuls donc $\text{rang}(A) < 3$

3. On cherche alors s'il y a un déterminant d'ordre 2 qui est non nul.

Un des déterminants d'ordre 2 est $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ donc $\boxed{\text{rang}(A) = 2}$

9.15 Rang d'une matrice

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$

9.15.1 Corrigé

1. A est une matrice de format $(3,3)$ donc $\text{rang}(A) \leq \min(3,3) = 3$.

2. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix} - r \begin{vmatrix} -r & p \\ q & 0 \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} -r & 0 \\ q & -p \end{vmatrix} = rpq - qrp = 0$ donc $\text{rang}(A) \neq 3$.

3. On a donc $\text{rang}(A) \leq 2$. Il reste à trouver au moins un déterminant d'ordre 2 non nul pour affirmer que $\text{rang}(A) = 2$.

- $\begin{vmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{vmatrix} = -r^2$
- $\begin{vmatrix} 0 & -q \\ -r & p \end{vmatrix} = rq$
- $\begin{vmatrix} r & -q \\ 0 & p \end{vmatrix} = rp$
- $\begin{vmatrix} 0 & r \\ q & -p \end{vmatrix} = -rq$
- $\begin{vmatrix} 0 & -q \\ q & 0 \end{vmatrix} = q^2$
- $\begin{vmatrix} r & -q \\ -p & 0 \end{vmatrix} = -pq$
- $\begin{vmatrix} -r & 0 \\ q & -p \end{vmatrix} = rp$
- $\begin{vmatrix} -r & p \\ q & 0 \end{vmatrix} = -qp$
- $\begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix} = p^2$

En conclusion,

◇ ou bien un des 3 nombres p, q, r est non nul

alors au moins un des déterminants précédents d'ordre 2 est non nul donc $\text{rang}(A) = 2$.

◇ ou bien $p = q = r = 0$

alors $A = O$ donc $\text{rang}(A) = 0$

9.16 Exercice

Soient a, b, c, d des réels.
Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix}$$

- A est une matrice carrée d'ordre 4 donc $\text{rang}(A) \leq 4$
- $A \neq$ la matrice nulle O donc $\text{rang}(A) > 0$
- Etudions $\det(A)$

◇ On effectue l'opération $c_2 \leftarrow c_2 - c_1$ alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1 & 1 \\ a & b-a & a & b \\ c & c-c & d & d \\ ac & bc-ac & ad & bd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & b-a & a & b \\ c & 0 & d & d \\ ac & c(b-a) & ad & bd \end{vmatrix}$$

◇ On effectue l'opération $c_4 \leftarrow c_4 - c_3$ alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-1 \\ a & b-a & a & b-a \\ c & 0 & d & d-d \\ ac & c(b-a) & ad & bd-ad \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & b-a & a & b-a \\ c & 0 & d & 0 \\ ac & c(b-a) & ad & d(b-a) \end{vmatrix}$$

◇ On effectue l'opération $c_3 \leftarrow c_3 - c_1$ alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-1 & 0 \\ a & b-a & a-a & b-a \\ c & 0 & d-c & 0 \\ ac & c(b-a) & ad-ac & d(b-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & b-a \\ c & 0 & d-c & 0 \\ ac & c(b-a) & a(d-c) & d(b-a) \end{vmatrix}$$

◇ Donc en développant selon la première ligne, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} b-a & 0 & b-a \\ 0 & d-c & 0 \\ c(b-a) & a(d-c) & d(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)(d-c)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & a & d \end{vmatrix}$$

◇ On effectue l'opération $c_3 \leftarrow c_3 - c_1$ alors :

$$\det(A) = (b-a)^2(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & a & d-c \end{vmatrix} = (b-a)^2(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & a & d-c \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } \det(A) = (b-a)^2(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & d-c \end{vmatrix} = (b-a)^2(d-c)^2$$

- ◇ ou bien $a \neq b$ et $c \neq d$ alors $\det(A) \neq 0$ donc $\boxed{\text{rang}(A) = 4}$

◇ ou bien $a = b$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ c & c & d & d \\ ac & ac & ad & ad \end{pmatrix}$

Comme $c_1 = c_2$ et $c_3 = c_4$ alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(c_1, c_3)$

★ ou bien $c = d$ alors $c_1 = c_3 \neq 0$ donc $\boxed{\text{rang}(A) = \text{rang}(c_1, c_3) = 1}$

★ ou bien $c \neq d$ alors $c_1 \neq c_3 \neq 0$ donc $\boxed{\text{rang}(A) = \text{rang}(c_1, c_3) = 2}$

◇ ou bien $a \neq b$ et $c = d$ alors par symétrie on a $\boxed{\text{rang}(A) = 2}$

9.17 Exercice

Soient a, b, c, d des réels.
Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

- A est une matrice carrée d'ordre 4 donc $\text{rang}(A) \leq 4$
- Etudions $\det(A)$.

◇ On peut remarquer que la somme de chaque ligne $S = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

◇ On remplace $c_1 \leftarrow C_1 + c_2 + c_3 + c_4$ donc

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a^2 + ab + ab + b^2 & ab & ab & b^2 \\ ab + a^2 + b^2 + ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab + b^2 + a^2 + ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 + ab + ab + a^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S & ab & ab & b^2 \\ S & a^2 & b^2 & ab \\ S & b^2 & a^2 & ab \\ S & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

◇ On remplace $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donc

$$\det(A) = S \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 - 1 & a^2 - ab & b^2 - ab & ab - b^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2 - ab & b^2 - ab & ab - b^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

◇ On remplace $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donc

$$\det(A) = S \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2 - ab & b^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & b^2 - ab & a^2 - ab & ab - b^2 \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

◇ On remplace $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ donc

$$\det(A) = S \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2 - ab & b^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & b^2 - ab & a^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix}$$

◇ En développant le déterminant par rapport à la première colonne on obtient :

$$\det(A) = (a + b)^2 \begin{vmatrix} a^2 - ab & b^2 - ab & ab - b^2 \\ b^2 - ab & a^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} = (a + b)^2 \begin{vmatrix} a(a - b) & -b(a - b) & b(a - b) \\ -b(a - b) & a(a - b) & b(a - b) \\ 0(a - b) & 0(a - b) & (a - b)(a + b) \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (a + b)^2 (a - b)(a - b)(a - b) \begin{vmatrix} a & -b & b \\ -b & a & b \\ 0 & 0 & a + b \end{vmatrix} = (a + b)^2 (a - b)^3 \begin{vmatrix} a & -b & b \\ -b & a & b \\ 0 & 0 & a + b \end{vmatrix}$$

◇ On développe alors le déterminant selon la troisième colonne donc :

$$\det(A) = (a + b)^2 (a - b)^3 (a + b) \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix} = (a + b)^3 (a - b)^3 (a^2 - b^2) = [a^2 - b^2]^4$$

- ◇ ou bien $a = b = 0$ alors $A = O$ donc $\boxed{\text{rang}(A) = 0}$
- ◇ ou bien $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $a = \pm b$ alors $\boxed{\text{rang}(A) = 1}$
- ◇ ou bien $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $a \neq \pm b$ alors $\det(A) \neq 0$ donc $\boxed{\text{rang}(A) = 4}$

9.18 Exercice

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 5 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 11 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

- A est une matrice de format (n, p) avec $n = 5$ et $p = 7$. donc $\text{rang}(A) \leq \min(n; p) = \min(5; 7) = 5$
- $A \neq$ la matrice nulle O donc $\text{rang}(A) > 0$
- Comme les vecteurs colonnes $c_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 37 \end{pmatrix}$ et $c_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles alors $\text{rang}(A) \geq 2$
- Il reste alors 3 cas possibles :
 - ◇ ou bien $\text{rang}(A) = 3$
 - ◇ ou bien $\text{rang}(A) = 4$
 - ◇ ou bien $\text{rang}(A) = 5$

9.19 Exercice

Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y - z, x - y + t, z + t)$$

1. Démontrer que f est linéaire
2. Déterminer le noyau de f . En donner une base et sa dimension.
3. Déterminer l'image de f . En donner une base et sa dimension.
4. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3
5. Soient v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 :
 $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (2, 1, 1)$.
 Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3

9.19.1 Corrigé

Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y - z, x - y + t, z + t)$$

1. f est linéaire car $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \forall (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$ on a : $f(\alpha(x, y, z, t) + \beta(x', y', z', t')) = \alpha f(x, y, z, t) + \beta f(x', y', z', t')$
 En effet, $\alpha(x, y, z, t) + \beta(x', y', z', t') = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t) + (\beta x', \beta y', \beta z', \beta t') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$
 donc $f(\alpha(x, y, z, t) + \beta(x', y', z', t')) =$
 $(\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' - (\alpha z + \beta z'), \alpha x + \beta x' - (\alpha y + \beta y') + \alpha t + \beta t', \alpha z + \beta z' + \alpha t + \beta t')$
 $= (\alpha(x + y - z) + \beta(x' + y' - z'), \alpha(x - y + t) + \beta(x' - y' + t'), \alpha(z + t) + \beta(z' + t'))$.
 Or $\alpha f(x, y, z, t) + \beta f(x', y', z', t') =$
 $\alpha(x + y - z, x - y + t, z + t) + \beta(x' + y' - z', x' - y' + t', z' + t') =$
 $(\alpha(x + y - z), \alpha(x - y + t), \alpha(z + t)) + (\beta(x' + y' - z'), \beta(x' - y' + t'), \beta(z' + t')) =$
 $(\alpha(x + y - z) + \beta(x' + y' - z'), \alpha(x - y + t) + \beta(x' - y' + t'), \alpha(z + t) + \beta(z' + t'))$
2. $(x, y, z, t) \in \ker(f) \iff f(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \iff (x + y - z, x - y + t, z + t) = (0, 0, 0) \iff$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

\iff

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + t = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

\iff

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ t = -z \end{cases}$$

\iff

$$\begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \\ t = -z \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ t = -z \end{cases}$$

Par conséquent $\ker(f) = \{(z, 0, -z, z) / z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 0, -1, 1) / z \in \mathbb{R}\} =$ le sous espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 0, -1, 1)$. Comme $(1, 0, -1, 1) \neq (0, 0, 0, 0)$ il est donc libre. Il est donc une base de $\ker(f)$ qui est donc la droite vectorielle de base $(1, 0, -1, 1)$.

3. Comme $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$ alors $1 + \dim(\text{Im}(f)) = 4$. Donc $\dim(\text{Im}(f)) = 3$. Comme la base canonique de \mathbb{R}^4 est $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ alors $\text{Im}(f) =$ l'image de f est le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par la famille de vecteurs $(f(1, 0, 0, 0), f(0, 1, 0, 0), f(0, 0, 1, 0), f(0, 0, 0, 1))$ c'est-à-dire $((1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Or $(1, 1, 0) + (-1, 0, 1) = (0, 1, 1)$ donc cette famille n'est pas libre. Par conséquent, $\text{Im}(f)$ est engendré par la famille $((1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 0, 1))$. Or $\text{Im}(f)$ est de dimension 3 donc la famille $((1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de $\text{Im}(f)$.
4. la matrice de f dans les bases canoniques $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^4 et $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3 car elle est libre. en effet :
 $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(2, 1, 1) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = \frac{-\gamma}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \frac{-\gamma}{3} + \beta + 2\gamma = 0 \\ \frac{-2\gamma}{3} + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = \frac{-\gamma}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \beta = \frac{-5\gamma}{3} \\ \beta = \frac{-\gamma}{3} \\ \alpha = \frac{-\gamma}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

6. Cherchons d'abord les coordonnées de (x, y, z) dans la base (v_1, v_2, v_3) : $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (x, y, z) \Rightarrow \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(2, 1, 1) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ 2\alpha + \beta + \gamma = y \\ 3\alpha + \gamma = z \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ 2\alpha + \beta + \gamma = y \\ \gamma = z - 3\alpha \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2(z - 3\alpha) = x \\ 2\alpha + \beta + z - 3\alpha = y \\ \gamma = z - 3\alpha \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} -5\alpha + \beta = x - 2z \\ -\alpha + \beta = y - z \\ \gamma = z - 3\alpha \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 4\alpha = -x + y + z \\ -\alpha + \beta = y - z \\ \gamma = z - 3\alpha \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-x + y + z}{4} \\ \beta = y - z + \frac{-x + y + z}{4} = \frac{-x + 5y - 3z}{4} \\ \gamma = z - 3\frac{-x + y + z}{4} = \frac{3x - 3y + 4z}{4} \end{cases}$$

On en déduit que

(a) $f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0) = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$

(b) $f(0, 1, 0, 0) = (1, -1, 0) = \frac{-1}{2}v_1 + \frac{-3}{2}v_2 + \frac{3}{2}v_3$

(c) $f(0, 0, 1, 0) = (-1, 0, 1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{-1}{2}v_2 + \frac{-1}{2}v_3$

(d) $f(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{-1}{2}v_3$

La matrice de f dans les bases canoniques $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^4 et $((1, 2, 3), (1, 1, 0), (2, 1, 1))$ de \mathbb{R}^3

$$Mat(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

9.20

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie.

Soit f une application linéaire surjective de E sur F .

Démontrer qu'il existe une application linéaire g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$

9.20.1 Corrigé

Soit $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F .

Tout $y \in F$ s'écrit $y = \sum_{i=1}^n y_i f_i$.

Comme f est surjective, chaque f_i a au moins un antécédent e_i dans E .

1. Posons $g : F \mapsto E$ telle que $\forall y \in F \quad g(y) = \sum_{i=1}^n y_i e_i$.

2. g est linéaire car $\forall y \in E \quad \forall z \in E \quad \forall \alpha \in K \quad g(y + \alpha z) = g(y) + \alpha g(z)$

En effet, $y = \sum_{i=1}^n y_i f_i$; $z = \sum_{i=1}^n z_i f_i$; $y + \alpha z = \sum_{i=1}^n y_i f_i + \alpha \sum_{i=1}^n z_i f_i = \sum_{i=1}^n y_i f_i + \alpha z_i f_i = \sum_{i=1}^n [y_i + \alpha z_i] f_i$

Alors $g(y + \alpha z) = g\left(\sum_{i=1}^n [y_i + \alpha z_i] f_i\right) = \sum_{i=1}^n [y_i + \alpha z_i] e_i = \sum_{i=1}^n y_i e_i + \sum_{i=1}^n \alpha z_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i e_i + \alpha \sum_{i=1}^n z_i e_i$
 $= g(y) + \alpha g(z)$

3. $\forall y \in F \quad (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(g\left(\sum_{i=1}^n y_i f_i\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n y_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n y_i f_i = y$
donc $f \circ g = Id_F$. CQFD.

9.20.2 Problème CCP 2019 MP2 sur les matrices semblables

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Partie I – Étude de quelques exemples

Q8 Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q9 On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique. Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable). Ont-elles le même polynôme minimal ?

Q10 On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes : *première méthode* : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E . *deuxième méthode* : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ .

Q11 Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & . & . & \vdots & a_2 \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \vdots & . & . & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Q12 *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

Q13 Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q14 On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α, β sont deux nombres complexes non nuls,

différents et non opposés. Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A . Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A . Préciser une base de vecteurs propres de A . Dans cette question, il est [vivement] déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A .

- Q15** Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ , les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

- Q16** Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.
Q17 Justifier que la fonction $x \mapsto \text{Det}(R + xS)$ est une fonction polynômiale non identiquement nulle [sur \mathbb{C}] et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $Q = R + xS$ soit inversible.
Q18 Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Q19 Application : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette question [partie] à la proposition P_n : « Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

- Q20** En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$. On admet qu'elle est vraie également pour $n = 3$.
Q21 Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1

Corrigé

- Q8** Trace, rang, déterminant et polynôme caractéristique sont invariants par changement de base et donc identiques pour deux matrices semblables (notons que trace et Det sont des coefficients du polynôme caractéristique).
Q9 Les matrices ayant triangulaires, on a tout de suite leurs valeurs propres (pour gagner du temps) 1, 2 et 2, d'où le déterminant (4), le rang (3 puisque $\text{Det} \neq 0$), la trace (1+2+2=5) et le polynôme caractéristique : $(X - 1)(X - 2)(X - 2)$. Je préfère répondre à la dernière question avant l'antépénultième : on constate que A est victime d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, à savoir $(X - 1)(X - 2)$. En effet,

$$(A - I)(A - 2I) = A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Donc A est diagonalisable par le théorème du cours. En revanche B ne l'est pas, car son espace propre $E_2(B)$ est réduit à une droite (comme $E_1(B)$) et donc la somme des espaces propres de B n'est pas E entier. En effet, la résolution du système

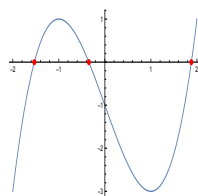
$$BX = 2X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{livre} \quad \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que B ne saurait avoir le même polynôme minimal, qui l'obligerait à être diagonalisable. Une autre démonstration consiste à observer que le minimal de B est soit égal à son caractéristique, soit à son seul diviseur strict ayant les mêmes racines i.e. $(X - 1)(X - 2)$ et à tester si ce dernier est annulateur (il ne l'est pas).

Q10 La première méthode consiste à définir u (associé à A) et v (associé à B) par les images de la base canonique :

$$\begin{cases} u(e_1) = e_2 + 2e_3 \\ u(e_2) = e_1 + e_3 \\ u(e_3) = e_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(e_1) = e_2 + e_3 \\ v(e_2) = e_1 + 2e_3 \\ v(e_3) = e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} v(e'_1) = e'_1 + e'_3 \\ v(e'_2) = e'_2 + 2e'_3 \\ v(e'_3) = e'_1 \end{cases}$$

en posant $e_2 = e'_1, e_1 = e'_2, e_3 = e'_3$: ce changement de base donne donc la même matrice, i.e. A et B sont semblables. La deuxième méthode consiste à calculer le polynôme caractéristique (commun) des deux matrices, à savoir $X^3 - 3X - 1$ (la règle de Sarrus marche bien, mais toute autre méthode est utilisable). Une étude sommaire de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x - 1$ montre que sa dérivée change de signe en -1 et en 1 , ce qui donne le graphe suivant :



Graphique du polynôme caractéristique

Comme la fonction est négative (resp. positive) en $-\infty$ (resp. $+\infty$), positive en -1 et négative en $+1$, elle a par continuité trois racines (au moins!), et pas plus vu le degré. On a trois racines distinctes du polynôme caractéristique, donc par la condition suffisante de diagonalisabilité, A (comme B) est diagonalisable.

Q11 Par le théorème du rang, le noyau est de dimension $n - 1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base de E commençant par $n - 1$ vecteurs du noyau. Dans cette base la matrice a la forme voulue, puisque les $n - 1$ premières colonnes sont nulles.

Q12 Appliquons la question précédente : u admet une matrice de la forme donnée. On calcule $U^2 = a_n U$. L'hypothèse $u \circ u \neq 0$ impose $a_n \neq 0$. Réciproquement cette condition suffit (car le dernier terme en bas à droite de U^2 est a_n^2). On a alors un polynôme annulateur à deux racines **distinctes** 0 et a_n , ce qui prouve la diagonalisabilité.

Q13 Par exemple la matrice suivante est symétrique et nilpotente (et non identiquement nulle!) ce qui exclut sa diagonalisabilité : $S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

Q14 Les première et troisième colonnes sont identiques, donc le rang n'est pas maximal. De même la deuxième et la quatrième, donc le rang est au plus 2. Or la première et la deuxième colonne sont indépendantes : sinon on aurait une constante λ telle que l'une soit égale à $\lambda \times$ l'autre ce qui donnerait

$$\alpha = \lambda\beta \quad \beta = \lambda\alpha$$

ce qui est impossible car vu que $\alpha\beta \neq 0$ on aurait $\lambda^2 = 1$ d'où α, β égaux ou opposés ce qui est supposé ne pas être. Donc **le rang est 2**. Par ailleurs, en raisonnant sur ces colonnes on s'aperçoit (avec de bonnes lunettes...) qu'en notant $(e_1 \dots e_4)$ la base canonique et u l'endomorphisme

associé, on a

$$\begin{cases} u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 2(\alpha + \beta)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ u(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) = 2(\alpha - \beta)(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \end{cases}$$

ce qui donne deux valeurs propres (distinctes parce que $\beta \neq 0$) et des vecteurs propres associés. En cherchant une base du noyau (non trivial vu le rang calculé), on trouve aussi $e_1 - e_3$ et $e_2 - e_4$. Ces quatre vecteurs forment bien une base, concaténée de bases des trois espaces propres.

NB : on pourrait maintenant en déduire le polynôme caractéristique ...

Q15 Considérons la base $(e'_1 = ae_1, e'_2 = e_2)$ [base car $a \neq 0$] et soit u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique (e_1, e_2) . Le changement de base ramène à la forme standard $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, car $u(e'_2) = u(e_2) = \lambda e'_2 + e'_1$. On peut faire de même pour B , donc ces deux matrices sont semblables à une troisième et sont semblables.

Q16 On a $PB = AP \iff (R + iS)B = A(R + iS) \iff RB + iSB = AR + iAS$ et on conclut en égalant les parties réelles et imaginaires (il est bien clair que deux matrices complexes sont égales \iff leurs parties réelles et imaginaires le sont).

Q17 Un déterminant est une somme de produits de termes de la matrice, donc ici de polynômes en x : c'est bien un polynôme en x . La **fonction** polynômiale $x \mapsto \text{Det}(R + xS)$ a une valeur non nulle quand $x = i$ par hypothèse (on trouve $\text{Det}P$), donc le **polynôme** n'est pas nul en tant qu'élément de $\mathbb{R}[X]$. En conséquence il n'a qu'un nombre fini de racines (réelles, complexes, au choix) et en particulier il existe une valeur **réelle** de x pour laquelle la fonction de vaut pas 0, i.e. $Q = R + xS$ est alors inversible.

Q18 Mais alors... nous avons trouvé une matrice Q inversible et réelle telle que $QB = AQ$ (en appliquant **Q16, Q17**)! On peut en déduire (trionphalement) que $B = Q^{-1}AQ$ avec $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q19 Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique $X^3 + X$ de racines $0, i, -i$: elles sont donc diagonalisables et semblables dans \mathbb{C} à la matrice $\text{Diag}(0, i, -i)$ et donc semblables dans \mathbb{C} . Étant réelles, elles sont semblables aussi dans \mathbb{R} , d'après le résultat juste démontré.

Q20 Le polynôme caractéristique est de degré 2.

- Si ses deux racines sont distinctes, alors les deux matrices sont diagonalisables dans \mathbb{C} , donc semblables à une même matrice diagonale (complexe ou purement réelle), donc semblables dans \mathbb{R} , d'après **Q18**.
- Si ses deux racines sont confondues, alors elles sont réelles mais on a besoin de l'égalité des polynômes minimaux. Comme on a le polynôme caractéristique égal à $(X - \lambda)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme minimal ne peut prendre que deux valeurs d'après le théorème de Cayley Hamilton : $\mu_A = X - \lambda$ ou $(X - \lambda)^2$.

1. Dans le premier cas, A (et B) sont des homothéties λId et c'est fini.
2. Dans le deuxième cas, A (comme B) ne peut être diagonalisable car, sa valeur propre unique étant λ , elle serait alors semblable à λI qui a un polynôme minimal de degré 1! Elle est néanmoins trigonalisable (son polynôme caractéristique étant scindé), et donc semblable à la matrice A de la question **Q15**. De même pour B (avec des constantes a, b a priori distinctes mais non nulles). D'après cette même question, ces matrices sont bien semblables et la discussion est complète.

Q21 On est sans doute supposé s'inspirer de **Q14**. Je propose plus simplement encore ce contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, ces matrices ne peuvent être semblables puisque leurs rangs sont 1 et 2 respectivement ; néanmoins, elles sont toutes deux nilpotentes d'indice 2 ($A^2 = B^2 = 0$, sans que ni A ni B ne soient nulles) ce qui signifie que leur polynôme minimal est X^2 , le polynôme caractéristique étant X^4 . Simple à vérifier mais pas à trouver quand on n'a jamais vu la réduction de Jordan.