

Exemples particuliers d'Applications linéaires



Professeur : Christian Jean CYRILLE

27 février 2026

Table des matières

1	Somme directe et Supplémentarité	7
1.1	Intersection de sous espaces vectoriels	7
1.1.1	Démonstration	7
1.2	Produit cartésien de deux sous-espaces vectoriels	7
1.2.1	Théorème	7
1.3	Somme de deux sous espaces vectoriels	8
1.3.1	Démonstration	8
1.3.2	Exemple	8
1.4	Formule des 4 dimensions de Grassmann	9
1.4.1	Démonstration utilisant le théorème de la base incomplète	9
1.4.2	Démonstration utilisant la formule du rang	10
1.5	Sous espaces vectoriels supplémentaires	11
1.5.1	Définition	11
1.5.2	Caractérisation en dimension finie	11
1.5.3	Exemples	12
1.5.4	Existence d'une infinité de supplémentaires	15
1.6	Exercices	16
1.6.1	Images de sev supplémentaires par une application linéaire injective	16
2	Formes Linéaires et Hyperplans	17
2.1	Définition	17
2.2	Exemples	17
2.3	Propriétés	18
2.4	Hyperplans	20
2.4.1	Définition	20
2.4.2	Dimension d'un hyperplan en dimension finie	20
2.4.3	Propriété caractéristique et équation d'un hyperplan	20
2.4.4	Corollaire en dimension finie	21
2.4.5	Exercices	22
2.4.6	Sujet en 2023	22
2.5	Un exemple particulier de forme linéaire : la trace	23
2.5.1	Propriétés de la trace	23
2.5.2	Trace d'un endomorphisme	24
2.5.3	Exercices	25
3	Transvections vectorielles, Dilatations vectorielles et Hyperplans	31
3.1	Transvection vectorielle	31
3.1.1	Définition	31

3.1.2	Propriétés en dimension finie ou infinie	31
3.1.3	Propriétés en dimension finie	32
3.1.4	Théorème fondamental des transvections ♡♡♡	33
3.2	Dilatation vectorielle	34
3.2.1	Définition	34
3.2.2	Propriétés en dimension finie ou infinie	34
3.2.3	Propriétés en dimension finie	34
4	Homothéties vectorielles	35
4.1	Définition	35
4.2	Propriétés	35
4.2.1	35
4.2.2	Lemme	36
4.2.3	Corollaire	36
4.2.4	Endomorphismes commutant avec n'importe quel autre endomorphisme	36
4.2.5	Sous-groupe des homothéties vectorielles	38
4.2.6	Exercices	38
5	Projecteurs ou projections vectorielles	41
5.1	Définition	41
5.2	Propriétés	42
5.2.1	Démonstration	42
5.3	Propriété caractéristique d'un projecteur ♡♡♡	43
5.3.1	Démonstration	43
5.4	Projecteurs associés p et $Id_E - p$	44
5.5	Somme de projecteurs	45
5.5.1	Projecteur construit à partir de deux projecteurs p et q	45
5.5.2	CNS pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur. ♡♡♡	47
5.6	Expression analytique d'un projecteur en dimension 3.	48
5.6.1	Exemple	48
5.7	Exemples de projecteurs	50
5.8	Représentation matricielle	51
5.9	Projections vectorielles orthogonales	52
5.9.1	Théorème et définition	52
5.9.2	Exemples de projections orthogonales en $\dim(E) = 2$	52
5.9.3	Exemples de projections orthogonales en $\dim(E) = 3$	53
5.9.4	Propriétés	53
5.10	Exercices	55
5.10.1	Projecteurs commutant	55
5.10.2	Projection vectorielle	56
5.10.3	Projection vectorielle	56
5.10.4	Agrégation Docteurs 20 - Ex 4	57
6	Symétries vectorielles	61
6.1	Involution	61
6.2	Remarque	61
6.3	Homothéties vectorielles involutives	61
6.3.1	Démonstration	61
6.4	Définition d'une symétrie vectorielle	62
6.5	Propriétés	62

6.5.1	Démonstration	62
6.6	Caractérisation d'un endomorphisme involutif	63
6.6.1	Démonstration	63
6.7	Expression analytique	64
6.8	Lien entre projection vectorielle et symétrie vectorielle	64
6.8.1	Corrigé	64
6.9	Exemples de symétries vectorielles	65
6.10	Représentation matricielle	67
6.11	Exercices	68
6.11.1	Symétrie vectorielle	68
6.11.2		69
6.11.3		71
7	Endomorphismes nilpotents	73
7.1	Définition	73
7.2	Propriétés	73
7.2.1	Démonstration	73
7.3	Valeur propre d'un endomorphisme nilpotent	74
7.4	Autres propriétés classiques - Centrale PSI II - 2019	74
7.4.1	Endomorphisme d'indice de nilpotence $p = 1$	74
7.4.2	Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2	74
7.5	Exercices	75
7.5.1	Matrice carrée idempotente	75
7.5.2	Exercice	75
7.5.3	Endomorphisme nilpotent d'indice 3	77
7.5.4	Epita 17 mp	79
8	Endomorphisme adjoint	81
8.1	Rappels	81
8.1.1	Transposée d'une matrice	81
8.1.2	Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée	81
8.1.3	Écriture du produit scalaire en dimension finie	82
8.1.4	Problème de l'endomorphisme adjoint	82
8.1.5	Existence de l'adjoint en dimension finie	83
8.1.6	Unicité de l'adjoint en dimension finie	83
8.1.7	Propriétés de l'adjoint	84
8.2	Endomorphismes et Matrices symétriques	85
8.2.1	Définitions équivalentes d'un endomorphisme symétrique	85
8.2.2	Dimension de $\mathcal{S}_n(E)$	85
8.2.3	Exemples	85
8.2.4	Propriétés d'un endomorphisme symétrique	87
8.2.5	Propriétés d'une matrice symétrique réelle	88
8.2.6	Propriété de la matrice $M = {}^t A A$	90
8.2.7	Exercices	91
8.2.8	Bibliographie	91
8.3	Endomorphismes et Matrices antisymétriques	92
8.3.1	Définition	92
8.3.2		92
8.3.3		92
8.3.4		92

8.3.5	Bibliographie	92
8.4	Endomorphismes normaux et Matrices normales	93
8.4.1	Définition	93
8.4.2	Exemples	93
8.4.3	Bibliographie	93
9	Opérateur différence finie Δ	95
9.1	Définition	95
9.2	Propriétés	95
9.3	Exercices	97
9.3.1	Centrale 2024 -MP/MPI- ep2	97
9.3.2	EMLyon Ecs 2015	97
10	Endomorphismes simples	99
10.1	Définition	99
10.2	Exemples	99
10.3	Propriétés	99
10.3.1	Théorème	99
10.3.2	Corollaire	99
11	Quelques problèmes	101
11.1	Applications semi-linéaires	101
11.1.1	Sujet	101
11.1.2	Corrigé	102

Chapitre 1

Somme directe et Supplémentarité

1.1 Intersection de sous espaces vectoriels

Soient \vec{F} et \vec{G} deux sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel E .
alors $\vec{F} \cap \vec{G}$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E}

1.1.1 Démonstration

$\vec{F} \cap \vec{G}$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E} car

- ◇ $\vec{F} \cap \vec{G} \subset \vec{E}$ car $\vec{F} \subset \vec{E}$ et $\vec{G} \subset \vec{E}$
- ◇ $\vec{0} \in \vec{F} \cap \vec{G}$ car $\vec{0} \in \vec{F}$ et $\vec{0} \in \vec{G}$
- ◇ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{F} \cap \vec{G} \quad \forall \vec{v} \in \vec{F} \cap \vec{G} \quad \vec{u} + \lambda \vec{v} \in \vec{F} \cap \vec{G}$ car :
 - ★ $\vec{u} + \lambda \vec{v} \in \vec{F}$ car \vec{F} est un sous-espace vectoriel de \vec{E}
 - ★ $\vec{u} + \lambda \vec{v} \in \vec{G}$ car \vec{G} est un sous-espace vectoriel de \vec{E}

1.2 Produit cartésien de deux sous-espaces vectoriels

1.2.1 Théorème

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie alors
 $F \times G$ est de dimension finie et $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$

Démonstration

1.3 Somme de deux sous espaces vectoriels

Soient \vec{F} et \vec{G} deux sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel E .

L'ensemble suivant $\vec{F} + \vec{G} = \{\vec{u}' + \vec{u}'' / \vec{u}' \in \vec{F} \text{ et } \vec{u}'' \in \vec{G}\}$ est un sous espace vectoriel de E .

On l'appellera la somme de \vec{F} et de \vec{G}

1.3.1 Démonstration

$\vec{F} + \vec{G}$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E} car

- ◊ $\vec{F} + \vec{G} \subset \vec{E}$ car tout élément $z \in \vec{F} + \vec{G}$ est aussi élément de \vec{E} puisque $z = f + g$ avec $f \in \vec{F}$ et $g \in \vec{G}$ et $\vec{F} \subset \vec{E}$ et $\vec{G} \subset \vec{E}$
- ◊ $\vec{0} \in \vec{F} + \vec{G}$ car $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ où $\vec{0} \in \vec{F}$ et $\vec{0} \in \vec{G}$
- ◊ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{F} + \vec{G} \quad \forall \vec{v} \in \vec{F} + \vec{G} \quad \vec{u} + \lambda \vec{v} \in \vec{F} + \vec{G}$ car
 - ★ $\vec{u} = f + g$ où $f \in \vec{F}$ et $g \in \vec{G}$
 - ★ $\vec{v} = f' + g'$ où $f' \in \vec{F}$ et $g' \in \vec{G}$
 - ★ $\vec{u} + \lambda \vec{v} = f + g + \lambda(f' + g') = f + \lambda g + f' + \lambda g'$
 - ★ $f + \lambda g \in \vec{F}$ car \vec{F} est un sous-espace vectoriel de \vec{E}
 - ★ $f' + \lambda g' \in \vec{G}$ car \vec{G} est un sous-espace vectoriel de \vec{E}

1.3.2 Exemple

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique différente de 2.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} .

Soit $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ le sous espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ le sous espace vectoriel des matrices symétriques.

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ le sous espace vectoriel des matrices diagonales.

alors

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

1. • $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ car toute matrice $M = (m_{ij})$ s'écrit $M = T + S$ avec

$$T = (t_{ij}) \text{ où } t_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ m_{ii} & \text{si } i = j \\ m_{ij} - m_{ji} & \text{si } i < j \end{cases} \quad \text{et } S = (s_{ij}) \text{ où } s_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ m_{ji} & \text{si } i < j \end{cases}$$

T est bien triangulaire supérieur et S est bien symétrique.

- par exemple, pour $n = 3$ on a

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} - m_{21} & m_{13} - m_{31} \\ 0 & m_{22} & m_{23} - m_{32} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & m_{21} & m_{31} \\ m_{21} & 0 & m_{32} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

- Comme $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

2. Il est évident que

$$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

1.4 Formule des 4 dimensions de Grassmann



Hermann Günther GRASSMANN(1809-1877)

Si \vec{F} et \vec{G} sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel \vec{E} de dimension finie alors

$$\dim(\vec{F} + \vec{G}) = \dim(\vec{F}) + \dim(\vec{G}) - \dim(\vec{F} \cap \vec{G})$$

1.4.1 Démonstration utilisant le théorème de la base incomplète

On pose $n = \dim(\vec{F} \cap \vec{G})$ et $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\vec{F} \cap \vec{G}$

- ◇ D'après le théorème de la base incomplète, comme $\vec{F} \cap \vec{G} \subset \vec{F}$ et que \mathcal{B}_1 est libre on peut la compléter pour obtenir une base $\mathcal{B}_2 = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ de \vec{F}
- ◇ D'après le théorème de la base incomplète, comme $\vec{F} \cap \vec{G} \subset \vec{G}$ et que \mathcal{B}_1 est libre on peut la compléter pour obtenir une base $\mathcal{B}_3 = (e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$ de \vec{G}
- ◇ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$.

★ **\mathcal{B} engendre $\vec{F} + \vec{G}$** : En effet, soit $z \in \vec{F} + \vec{G}$ alors $\exists x \in \vec{F} \quad \exists y \in \vec{G} \quad z = x + y$.

$$\exists (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^{n+p} \quad x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 f_1 + \dots + b_p f_p$$

$$\exists (a'_1, \dots, a'_n, c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{R}^{n+q} \quad y = a'_1 e_1 + \dots + a'_n e_n + c_1 g_1 + \dots + c_q g_q$$

$$\text{Alors } z = (a_1 + a'_1) e_1 + \dots + (a_n + a'_n) e_n + b_1 f_1 + \dots + b_p f_p + c_1 g_1 + \dots + c_q g_q.$$

★ **\mathcal{B} est libre** :

$$\text{Supposons que } a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 f_1 + \dots + b_p f_p + c_1 g_1 + \dots + c_q g_q = \vec{0}$$

$$\text{alors } \vec{u} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 f_1 + \dots + b_p f_p = -c_1 g_1 - \dots - c_q g_q$$

donc $\vec{u} \in \vec{F} \cap \vec{G}$ qui a pour base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$.

$$\text{Par conséquent, } \vec{u} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 f_1 + \dots + b_p f_p = a'_1 e_1 + \dots + a'_n e_n$$

$$\text{Or l'écriture d'un vecteur dans une base est unique donc } \begin{cases} a_1 = a'_1 \\ \vdots \\ a_n = a'_n \\ b_1 = 0 \\ \vdots \\ b_p = 0 \end{cases}$$

$$\text{Comme } a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 f_1 + \dots + b_p f_p + c_1 g_1 + \dots + c_q g_q = \vec{0}$$

on en déduit que $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + c_1 g_1 + \dots + c_q g_q = \vec{0}$.

Mais $\mathcal{B}_3 = (e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$ est une base de \vec{G}

donc $a_1 = \dots = a_n = c_1 = \dots = c_q = 0$.

En fin de compte, $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_p = c_1 = \dots = c_q = 0$ donc \mathcal{B} est libre

★ Par conséquent, \mathcal{B} est une base de $\vec{F} + \vec{G}$.

Comme $\dim(\vec{F} + \vec{G}) = \text{Card}(\mathcal{B}) = n + p + q$; comme $\dim(\vec{F} \cap \vec{G}) = n$; comme

$\dim(\vec{F}) = n + p$ et comme $\dim(\vec{G}) = n + q$ alors on a bien :

$$\dim(\vec{F} + \vec{G}) = \dim(\vec{F}) + \dim(\vec{G}) - \dim(\vec{F} \cap \vec{G})$$

1.4.2 Démonstration utilisant la formule du rang

1. L'application

$$\begin{aligned} \phi : \vec{F} \times \vec{G} &\longrightarrow \vec{F} + \vec{G} \subset \vec{E} \\ (x', x'') &\longmapsto x' + x'' \end{aligned}$$

est linéaire

2. Donc d'après la formule du rang :

$$\dim(\vec{F} \times \vec{G}) = \dim(\phi(\vec{F} \times \vec{G})) + \dim(\ker(\phi))$$

3. Or $\phi(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} + \vec{G}$ donc $\dim(\phi(\vec{F} \times \vec{G})) = \dim(\vec{F} + \vec{G})$

4. $(x', x'') \in \ker(\phi) \iff x' + x'' = 0 \iff x' = -x''$

donc $\ker(\phi) = \{(x, -x) / x \in \vec{F} \cap \vec{G}\}$.

Or l'application $x \mapsto (x, -x)$ est un isomorphisme entre $\vec{F} \cap \vec{G}$ et $\ker(\phi)$

donc $\dim(\ker(\phi)) = \dim(\vec{F} \cap \vec{G})$

5. Or $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$

6. Par conséquent, $\dim(\vec{F} + \vec{G}) = \dim(\vec{F}) + \dim(\vec{G}) - \dim(\vec{F} \cap \vec{G})$

1.5 Sous espaces vectoriels supplémentaires



1.5.1 Définition

Soient \vec{E}' et \vec{E}'' deux sous-espaces vectoriels de \vec{E} .

On dit que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} lorsque

- $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{\vec{0}\}$
- $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$

On dit alors que \vec{E} est somme directe de \vec{E}' et de \vec{E}'' que l'on note

$$\vec{E} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$$

$$\vec{E} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$$



Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$ s'écrit de façon unique $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ où $\vec{u}' \in \vec{E}'$ et $\vec{u}'' \in \vec{E}''$

1.5.2 Caractérisation en dimension finie

Si \vec{E} est un espace vectoriel de dimension n

Si \vec{E}' et \vec{E}'' sont deux sous-espaces vectoriels de \vec{E}

Alors deux des 3 propriétés suivantes entraînent la troisième :

1. $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \vec{0}$
2. $\vec{E}' + \vec{E}'' = \vec{E}$
3. $\dim(\vec{E}) = \dim(\vec{E}') + \dim(\vec{E}'')$

1.5.3 Exemples



Exemple 1

$\{\vec{0}\}$ et \vec{E} sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires.

Exemple 2

Dans un plan vectoriel \vec{P} deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires.

Exemple 3

Dans un espace vectoriel de dimension 3, un plan vectoriel \vec{P} et une droite vectorielle \vec{D} non incluse dans \vec{P} sont supplémentaires.

Exemple 4

$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad \mathbb{K}_n[X] = P \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ avec $P \mathbb{K}_n[X] = \{PQ/Q \in \mathbb{K}_n[X]\}$.

En effet, à cause de l'unicité de la division euclidienne de tout polynôme A par P
 $\exists!(Q, R) \quad A = PQ + R$ avec $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $R = O$ ou $d(R) < d(P)$

Exemple 5

Soit \mathbb{K} un corps.

1. L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$
 En effet, toute matrice carrée M se décompose de façon unique en la somme d'une matrice carrée symétrique et d'une matrice carrée antisymétrique.
4. $\diamond \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$
 $\diamond \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$
 \diamond Donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées symétriques est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n car c'est le noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto M - {}^t M$.
2. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées antisymétriques est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n car c'est le noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto M + {}^t M$.
3. Pour prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ il faut démontrer que

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{O\} \\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \end{cases}$$

- ◇ ★ Il est évident que $\{O\} \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- ★ Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors $A = {}^t A = -A$ donc $A = O$
donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{O\}$
- ★ Par conséquent, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$
- ◇ Démontrons maintenant par analyse-synthèse que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- ★ Analyse :

Supposons que $M = S + A$ où S est une matrice symétrique (donc ${}^t S = S$) et A une matrice antisymétrique (donc ${}^t A = -A$).

Alors ${}^t M = {}^t(S + A) = {}^t S + {}^t A = S - A$.

Comme

$$\begin{cases} M = S + A \\ {}^t M = S - A \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}(M + {}^t M) \\ A = \frac{1}{2}(M - {}^t M) \end{cases}$$

★ Synthèse :

Soit M une matrice carrée. Soit $S = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$ alors

(a) $M = S + A$

(b) ${}^t S = {}^t\left(\frac{1}{2}(M + {}^t M)\right) = \frac{1}{2}({}^t M + {}^t({}^t M)) = \frac{1}{2}({}^t M + M) = S$
donc S est symétrique.

(c) ${}^t A = {}^t\left(\frac{1}{2}(M - {}^t M)\right) = \frac{1}{2}({}^t M - {}^t({}^t M)) = \frac{1}{2}({}^t M - M) = -A$
donc A est antisymétrique.

4. ◇ $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$ car toute matrice carrée $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ s'écrit de façon unique $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice qui n'a que des zéros sauf le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

◇ ★ Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique donc $\forall (i, j) \in [1; n]^2$ $m_{ij} = m_{ji}$.

Par conséquent $M = \sum_{i=1}^n m_{ii} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} m_{ij} E_{ij}$

$$M = \sum_{i=1}^n m_{ii} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} m_{ji} E_{ij}$$

Dans la troisième somme, on change les variables "muettes" i en j et j en i .

$$M = \sum_{i=1}^n m_{ii} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} E_{ji}$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_{ii} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} [E_{ij} + E_{ji}]$$

★ Soit la famille \mathcal{B} formée des n matrices symétriques $E_{i,i}$

et des $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ matrices $E_{ij} + E_{ji}$ qui sont symétriques elles aussi car elles sont formées que des zéros sauf les deux coefficients valant 1 situés à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et à l'intersection de la ligne j et de la colonne i

On a donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(\mathcal{B})$

★ Cette famille \mathcal{B} est libre car pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et pour tous réels β_{ij}

$$\text{où } 1 \leq i < j \leq n \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} [E_{ij} + E_{ji}] = 0$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} E_{ji} = 0$$

Donc en changeant dans la troisième somme les variables "muettes" i en j et j en i on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \beta_{ji} E_{ij} = 0$$

En fait, on se retrouve devant une combinaison linéaire nulle de tous les n^2 E_{ij} qui forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc tous ces coefficients sont tous nuls. Ce qui nous permet de conclure que la famille \mathcal{B} est libre.

★ Par conséquent \mathcal{B} est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$

◇ Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ alors $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

1.5.4 Existence d'une infinité de supplémentaires

Soit \mathbb{K} un corps commutatif infini et soit un \mathbb{K} -espace vectoriel \vec{E} .
 Soit \vec{F} un sous espace vectoriel de \vec{E} .
 Alors \vec{F} admet une infinité de supplémentaires dans \vec{E}

Démonstration :

a) **En dimension finie**

Comme $\dim(\vec{E}) = n$ est finie alors $\dim(\vec{F}) = p$ est finie avec $p \leq n$.

- ou bien $\vec{F} = \{\vec{0}\}$ alors \vec{E} est un supplémentaire de \vec{F} .
- ou bien $\vec{F} \neq \{\vec{0}\}$ donc \vec{F} possède une base (e_1, e_2, \dots, e_p) que l'on peut compléter en une base de \vec{E} : $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Soit $\vec{G} = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$ démontrons qu' $\exists!(f, g) \in \vec{F} \times \vec{G} \quad x = f + g$

Analyse :

Supposons que $x = f + g$ où $f \in \vec{F}$ et $g \in \vec{G}$.

Si l'on note (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans la base (e_1, \dots, e_n) , comme les $n - p$ dernières coordonnées de f sont nulles dans cette base ainsi que les p premières coordonnées de g dans cette base alors f a pour coordonnées (x_1, \dots, x_p) et g a pour coordonnées (x_{p+1}, \dots, x_n)

Par conséquent, $f = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ et $g = \sum_{i=p+1}^n x_i e_i$

Synthèse :

Soient $f = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ et $g = \sum_{i=p+1}^n x_i e_i$ alors $x = f + g$ avec $f \in \vec{F}$ et $g \in \vec{G}$

b) en dimension infinie

1.6 Exercices

1.6.1 Images de sev supplémentaires par une application linéaire injective

Soient E et F des espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) f est injective.
- ii) l'image par f de toute famille libre finie de E est libre dans F .
- iii) Pour toute décomposition $E = G \oplus H$ alors $f(E) = f(G) \oplus f(H)$.

1. $i) \implies ii)$:

Démontrons que si f est injective alors l'image de toute famille libre de E est libre dans F :

Soit $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ une famille libre finie.

Supposons que $\sum_{i \in I} \lambda_i f(\vec{e}_i) = \vec{0}_F$ alors $f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}_F$. Donc $\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{e}_i \in \ker(f)$.

Or f est injective donc son noyau $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$. Par conséquent, $\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{e}_i = \{\vec{0}_E\}$.

Or la famille $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ est libre donc $\forall i \in I \quad \lambda_i = 0$.

2. $ii) \implies i)$:

Démontrons la réciproque : Si l'image de toute famille libre de E est libre dans F alors f est injective.

Nous allons démontrer en fait la contraposée de cette implication.

Supposons que f n'est pas injective donc $\ker(f) \neq \{\vec{0}\}$ donc $\exists \vec{x} \neq \{\vec{0}\}_E$ avec $f(\vec{x}) = \{\vec{0}\}_F$.

$\exists x_1 \in E \quad \exists x_2 \in E \quad x = x_1 + x_2$ avec la famille (x_1, x_2) libre .

Comme l'image de toute famille libre de E est libre dans F alors la famille $(f(x_1), f(x_2))$ est libre.

Ceci est impossible car $0 = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ donc la famille $(f(x_1), f(x_2))$ est liée .

Par conséquent, $\ker(f) = \{0\}$ donc f est injective.

3. $ii) \implies iii)$

Pour toute décomposition $E = G \oplus H$ alors $f(E) = f(G) \oplus f(H)$

4. $iii) \implies ii)$

Chapitre 2

Formes Linéaires et Hyperplans

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie ou infinie et où \mathbb{K} est un corps commutatif.

2.1 Définition

- On appelle **forme linéaire** toute application linéaire de E dans \mathbb{K} .
- L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires définies sur E s'appelle **le dual** de E et se note E^* .
- L'ensemble $\mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$ des formes linéaires définies sur E^* s'appelle **le bidual** de E et se note E^{**} .

2.2 Exemples

1. Forme linéaire classique sur \mathbb{R}^2

l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = ax + by \text{ ou } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $E = \mathbb{R}^2$

2. Forme linéaire nulle

Si E est un \mathbb{K} -ev alors l'application

$$\begin{aligned} \theta : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \theta(x) = 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E qui est la forme linéaire nulle.

3. Forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$

Si $E = \mathbb{K}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , si $a \in \mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\longmapsto \phi(P) = P(a) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E

4. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé

Si $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues (donc intégrables) sur $[a; b] \subset \mathbb{R}$, alors l'application

$$\begin{aligned} \text{int} : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \text{int}(f) = \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E

5. La trace d'une matrice carrée

Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} , alors l'application trace

$$\begin{aligned} \text{tr} : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M = (a_{i,j}) &\longmapsto \text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E

2.3 Propriétés



1. L'application

$$\begin{aligned} \text{crochet de dualité} : E \times E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, f) &\longmapsto \langle x, f \rangle = f(x) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire appelée **forme bilinéaire canonique** définie sur $E \times E^*$ car :

- $\langle \cdot, f \rangle$ est linéaire de E dans \mathbb{K} puisque $\forall x \in E \forall y \in E \forall f \in E^* \forall \lambda \in \mathbb{K}$
 - (a) $\langle x + y, f \rangle = f(x + y) = f(x) + f(y) = \langle x, f \rangle + \langle y, f \rangle$
 - (b) $\langle \lambda x, f \rangle = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \langle x, f \rangle$
- $\langle x, \cdot \rangle$ est linéaire de E^* dans \mathbb{K} puisque $\forall x \in E \forall f \in E^* \forall g \in E^* \forall \lambda \in \mathbb{K}$
 - (a) $\langle x, f + g \rangle = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \langle x, f \rangle + \langle x, g \rangle$
 - (b) $\langle x, \lambda f \rangle = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \langle x, f \rangle$

2. L'application partielle

$$\begin{aligned} \langle x, \cdot \rangle : E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \langle x, f \rangle = f(x) \end{aligned}$$

est une application linéaire de E^* dans \mathbb{K} donc un élément du bidual E^{**} .

Comme cette forme linéaire est associée à x , on l'appellera \tilde{x} .

On a donc $\tilde{x}(f) = f(x)$ c'est-à-dire $\langle x, f \rangle = f(x) = \tilde{x}(f) = \langle f, \tilde{x} \rangle$

3. L'application canonique

$$\begin{aligned} \text{tilde} : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \text{tilde}(x) = \tilde{x} \end{aligned}$$

est linéaire car $\forall x \in E \forall y \in E \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(a) $\text{tilde}(x + y) = \text{tilde}(x) + \text{tilde}(y)$ puisque $\forall f \in E^*$

$$\widehat{(x + y)}(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \tilde{x}(f) + \tilde{y}(f)$$

(b) $\text{tilde}(\lambda x) = \lambda \text{tilde}(x)$ puisque $\forall f \in E^*$

$$\widehat{(\lambda x)}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \tilde{x}(f)$$

On l'appelle l'**homomorphisme canonique** de E dans E^{**} .

4. Dans le cas où $\dim(E)$ est infinie, on démontre que

$$\begin{aligned} \text{tilde} : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \text{tilde}(x) = \tilde{x} \end{aligned}$$

est injective mais non surjective.

(cf Algèbre MP 1 de Michel Queysanne -Revuz ex 172 p 299)

5. Dans le cas où $\dim(E)$ est finie

(a) E^* est de dimension finie et $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E)\dim(\mathbb{K}) = \dim(E)$ car $\dim(\mathbb{K}) = 1$.

(b) Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de façon unique

On considère les n formes linéaires e_i^* définies par

$$\begin{aligned} e_i^* : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto e_i^*(x) = x_i \end{aligned}$$

e_i^* s'appelle la **forme i -ème coordonnée relative à la base \mathcal{B}**

$$\forall i \in [1; n] \quad \forall j \in [1; n] \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{tilde} : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \text{tilde}(x) = \tilde{x} \end{aligned}$$

est linéaire bijective donc est un **isomorphisme canonique** entre E et E^{**} .

Donc

$$E \approx E^{**}$$

Dorénavant, on identifiera E et son bidual E^{}**



2.4 Hyperplans

2.4.1 Définition



Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E .

On dira que

H est un hyperplan de E lorsque H est un sous espace vectoriel de codimension 1

c'est-à-dire

qu'il existe dans E une droite vectorielle supplémentaire de H .

Toute droite vectorielle $\mathbb{K}\vec{e}$ de E engendrée par un vecteur $\vec{e} \notin H$ est un supplémentaire de H .

En fait,

$$E = \mathbb{K}\vec{e} \oplus H = \text{Vect}(\vec{e}) \oplus H \text{ avec } \vec{e} \notin H$$

2.4.2 Dimension d'un hyperplan en dimension finie

Si E est un K -ev de **dimension finie** n et H un hyperplan de E alors $\dim(H) = n - 1$.

2.4.3 Propriété caractéristique et équation d'un hyperplan

H est un hyperplan $\iff H$ est le noyau d'une forme linéaire ϕ non nulle.

On dit alors que l'hyperplan H a alors pour équation $\phi(x) = 0$.

Un hyperplan H est donc défini par une équation linéaire homogène non triviale.

Démonstration :

- \implies : Si H est un hyperplan de E donc $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{e}$ où $\vec{e} \notin H$.

Soit

$$\begin{aligned} \phi : E = H \oplus \mathbb{K}\vec{e} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \vec{x} = \vec{h} + \lambda\vec{e} &\longmapsto \phi(\vec{x}) = \lambda \end{aligned}$$

• \diamond On démontre aisément que ϕ est une application linéaire donc $\phi \in E^*$

\diamond ϕ est non nulle.

\diamond $\vec{x} \in \ker(\phi) \iff \phi(\vec{x}) = \vec{0} \iff \lambda = 0 \iff \vec{x} = \vec{h} \in H$
donc $\ker(\phi) = H$

- \impliedby :

Soit ϕ une forme linéaire non nulle. Soit $N = \ker(\phi)$ son noyau.

Soit $\vec{e} \notin E - N$ donc $\phi(\vec{e}) \neq 0$.

Soit $\vec{x} \in E$ et soit $\lambda = \frac{\phi(\vec{x})}{\phi(\vec{e})}$.

$\phi(\vec{x} - \lambda\vec{e}) = \phi(\vec{x}) - \phi(\lambda\vec{e}) = \phi(\vec{x}) - \lambda\phi(\vec{e}) = \phi(\vec{x}) - \frac{\phi(\vec{x})}{\phi(\vec{e})}\phi(\vec{e}) = 0$ donc $\vec{x} - \lambda\vec{e} \in N$.

Par conséquent, $\vec{x} \in \mathbb{K}\vec{e} \oplus N$ donc $E = N \oplus \mathbb{K}\vec{e}$ donc N est un hyperplan.

2.4.4 Corollaire en dimension finie

Si E est un K -ev de dimension finie n et H un hyperplan de E alors :

1. $\dim(H) = n - 1$
2. Toute forme linéaire non nulle ϕ est surjective.

Soit ϕ une forme linéaire non nulle donc $\ker(\phi)$ est un hyperplan.

D'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{Im}(\phi))$ donc $n = n - 1 + \dim(\text{Im}(\phi))$ donc $\dim(\text{Im}(\phi)) = 1 = \dim(\mathbb{K})$ donc $\text{Im}(\phi) = \mathbb{K}$ donc ϕ est surjective. CQFD.

2.4.5 Exercices

Edhec 2013 - ECS - ex 2

Tout endomorphisme f d'un espace vectoriel réel ayant au moins une valeur propre réelle λ admet au moins un hyperplan H stable par f .

2.4.6 Sujet en 2023

2.5 Un exemple particulier de forme linéaire : la trace

On appelle trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de format n la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

2.5.1 Propriétés de la trace

- La trace d'une matrice est **une application linéaire** car :

1.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

2.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$$

- La trace est donc un élément du dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ surjectif, non injectif donc non bijectif.
- La trace a aussi **une autre propriété intéressante** :

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Démonstrations :

1. si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$$\text{donc } \text{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \alpha A = (\alpha a_{ij})$

$$\text{donc } \text{tr}(\alpha A) = \sum_{i=1}^n \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} = \alpha \text{tr}(A)$$

3. • tr est surjective car tout élément x de \mathbb{K} a au moins un antécédent : toute matrice carrée A ayant x et $n - 1$ zéros sur la diagonale principale car $\text{tr}(A) = x$
 • tr n'est pas injective car il existe des matrices différentes ayant même trace.
 • Par conséquent, tr n'est pas bijective donc tr n'est pas inversible.

4. $AB = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ et $BA = (d_{ij})$ où $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ki}a_{ik} \right)$$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ik}a_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \text{tr}(BA)$$

Exercice

Soient des matrices carrées complexes A et B d'ordre $n \neq 0$ vérifiant la relation suivante

$$AB - BA = A$$

Démontrer que A n'est pas inversible.

Supposons que A soit inversible donc $\exists A^{-1}$ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Alors $(AB - BA)A^{-1} = AA^{-1}$ donc $ABA^{-1} - BAA^{-1} = I$ d'où $ABA^{-1} = B + I$.

Or $tr(ABA^{-1}) = tr((AB)A^{-1}) = tr(A^{-1}(AB)) = tr((A^{-1}A)B) = tr(IB) = Tr(B)$.

On aura donc $tr(B) = tr(B + I) = tr(B) + tr(I) = Tr(B) + n$ donc $n = 0$.

Or ceci est impossible.

2.5.2 Trace d'un endomorphisme

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases de E alors :

- Les matrices M et M' de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont semblables c'est-à-dire

$$\exists P \text{ inversible} \quad M = P M' P^{-1}$$

P est la matrice de passage de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' . P est donc la matrice de Id_E entre (E, \mathcal{B}') et (E, \mathcal{B}) donc les colonnes de P sont les coordonnées des éléments de la base \mathcal{B}' dans celle de \mathcal{B}

- M et M' sont des matrices semblables donc ont même trace.

On appelle ce nombre commun la trace de f : $tr(f) = tr(M) = tr(M')$

Comme M et M' sont semblables alors $\exists P$ inversible telle que $M = P^{-1}M'P$ d'où

$tr(M) = tr(P^{-1}M'P) = tr(P^{-1}(M'P)) = tr((M'P)P^{-1}) = tr(M'(PP^{-1})) = tr(M'I) = tr(M')$.
CQFD.

Exercice d'application

Les deux matrices carrées suivantes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

Non car $tr(A) = 0 \neq Tr(B) = 2$.

2.5.3 Exercices

Extrait QCM ICNA 14

Démontrer que

1. $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3 \quad \text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$.
2. $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3 \quad \text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$ est faux.
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \text{tr}({}^t A B) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right)$.

Corrigé :

1. $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3 \quad \text{tr}(ABC) = \text{tr}((AB)C) = \text{tr}(C(AB)) = \text{tr}(CAB)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
 Alors $ABC = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 Donc $\text{tr}(ABC) = 8 \neq 0 = \text{tr}(BAC)$
3. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors ${}^t A = (a_{ji})$ d'où $\text{tr}({}^t A B) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right)$.

Exercice

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que $\text{tr}(A) = \det(A) = 0$.
 Démontrer que $A^2 = O$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Comme } \text{tr}(A) = 0 \text{ donc } a + d = 0 \text{ d'où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dans ce cas, } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = -a^2 - bc. \text{ Comme } \det(A) = 0 \text{ alors } a^2 + bc = 0.$$

$$\text{Alors } A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Exercice

Résoudre l'équation suivante $X + \text{tr}(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) = 0$.

Corrigé :

- Si $X + \text{tr}(X)A = B$ alors $X = -\text{tr}(X)A + B$
 donc $X \in \{kA + B / k \in \mathbb{R}\}$
- Réciproquement, si $X \in \{kA + B / k \in \mathbb{R}\}$
 alors $X + \text{tr}(X)A = kA + B + \text{tr}(kA + B)A = kA + B + (\text{tr}(kA) + \text{tr}(B))A$
 $= kA + B + \text{tr}(kA)A + 0.A = kA + B + k \text{tr}(A)A = kA + B - kA = B$.
- En conclusion, L'ensemble cherché est $\mathcal{S} = \{kA + B / k \in \mathbb{R}\}$

Extrait Tunis MP 2019

1. Démontrer que l'ensemble \mathcal{S}_n des matrices carrées symétriques est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n .
2. Démontrer que l'ensemble \mathcal{A}_n des matrices carrées antisymétriques est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n .
3. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
4. Démontrer que l'application suivante : $(A, B) \mapsto \phi(A, B) = \text{Tr}({}^t A B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
5. Démontrer que $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n^\perp$

1. \mathcal{S}_n des matrices carrées symétriques est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n car c'est le noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto M - {}^t M$.
2. \mathcal{A}_n des matrices carrées antisymétriques est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n car c'est le noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto M + {}^t M$.
3. Pour prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ il faut démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$ et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
 - (a)
 - Il est évident que $\{O\} \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
 - Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors $A = {}^t A = -A$ donc $A = O$
donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{O\}$
 - Par conséquent, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$
 - (b) Démontrons maintenant par analyse-synthèse que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
 - i. Analyse :
Supposons que $M = S + A$ où S est une matrice symétrique (donc ${}^t S = S$) et A une matrice antisymétrique (donc ${}^t A = -A$).
Alors ${}^t M = {}^t(S + A) = {}^t S + {}^t A = S - A$.
Comme
$$\begin{cases} M = S + A \\ {}^t M = S - A \end{cases}$$
alors
$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}(M + {}^t M) \\ A = \frac{1}{2}(M - {}^t M) \end{cases}$$
 - ii. Synthèse :
Soit M une matrice carrée. Soit $S = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$ alors
 - A. $M = S + A$
 - B. ${}^t S = {}^t\left(\frac{1}{2}(M + {}^t M)\right) = \frac{1}{2}({}^t M + {}^t({}^t M)) = \frac{1}{2}({}^t M + M) = S$
donc S est symétrique.
 - C. ${}^t A = {}^t\left(\frac{1}{2}(M - {}^t M)\right) = \frac{1}{2}({}^t M - {}^t({}^t M)) = \frac{1}{2}({}^t M - M) = -A$
donc A est antisymétrique.

4. ϕ est un produit scalaire car

$$(a) \phi \text{ est symétrique car } \phi(A, B) = \text{Tr}({}^t A B) = \text{Tr}({}^t({}^t A B)) = \text{Tr}({}^t B {}^t({}^t A)) = \text{Tr}({}^t B A) = \phi(B, A)$$

(b) ϕ est linéaire par rapport à la première variable :

$$\phi(\alpha A_1 + A_2, B) = \text{Tr}({}^t(\alpha A_1 + A_2) B) = \text{Tr}((\alpha {}^t A_1 + {}^t A_2) B) = \text{Tr}(\alpha {}^t A_1 B) + \text{Tr}({}^t A_2 B) = \alpha \phi(A_1, B) + \phi(A_2, B)$$

$$(c) \phi(A, A) = \text{tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} \right) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \geq 0.$$

$$(d) \phi(A, A) = 0 \iff \text{tr}({}^t A A) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) = 0 \\ \iff \forall i \quad \forall j \quad a_{ij}^2 = 0 \iff \forall i \quad \forall j \quad a_{ij} = 0 \iff A = O$$

5. Démontrons que $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n^\perp$

(a) $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{A}_n^\perp$ car si $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{A}_n$

$$\text{alors } \phi(A, B) = \text{tr}({}^t A B) = \text{tr}(AB) = \text{tr}({}^t(AB)) = \text{tr}({}^t B {}^t A) = \text{tr}({}^t A {}^t B) = \text{tr}({}^t A (-B)) = -\phi(A, B) \text{ donc } \phi(A, B) = 0. \text{ CQFD.}$$

(b) On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$
donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{A}_n^\perp)$

(c) Comme $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{A}_n^\perp$ et que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{A}_n^\perp)$ alors $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n^\perp$

Matrices de trace nulle

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

1. Démontrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.
2. Démontrer que E est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que l'ensemble des matrices carrées de trace nulle et de déterminant 1 n'est pas borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4. On suppose dans cette question que $n = 2$
 - (a) Donner une base de E .
 - (b) Démontrer que la trace d'une matrice carrée d'ordre 2 est nulle si et seulement si elle est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Corrigé :

1. • E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car
 $\forall M \in E \quad \forall N \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha M + N \in E$
 puisque $tr(\alpha M + N) = \alpha tr(M) + tr(N) = \alpha(0) + 0 = 0$.
 • Soit $M = a_{i,j}$ comme $tr(M) = 0$ alors $a_{n,n} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j}$.
 Par conséquent E est engendré par la famille $\mathcal{F} = (E_{1,1}; E_{1,2}; \dots; E_{n,n-1})$. Cette famille est libre car c'est une sous famille de la famille $\mathcal{F} = (E_{1,1}; E_{1,2}; \dots; E_{n,n})$ qui est libre puisque c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 • E a donc pour base \mathcal{F} qui a pour cardinal $n^2 - 1$ donc $dim(E) = n^2 - 1$.
2. L'application trace notée tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R} . Ces deux espaces vectoriels sont de dimension finie car $dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ et $dim(\mathbb{R}) = 1$.
 Par conséquent, cette application linéaire tr est continue donc l'image réciproque d'un fermé est un fermé.
 Or l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ donc un fermé. CQFD.

$$3. \text{ Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Alors } \forall tr(M) = 0 \text{ et } det(M) =$$

4. (a) Si $n = 2$ alors une matrice M de E a la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a + d = 0$

$$\text{Par conséquent } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On démontre aisément que la famille $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; E_{1,2}; E_{2,1})$ est libre et comme elle engendre E alors c'est une base de E .

- (b) (idée :)

- \implies : Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme f de trace nulle sont opposées. Si elles sont distinctes, montrer qu'il existe une base (i, j) dans laquelle la matrice de f serait $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. Déterminer ensuite une base dans laquelle la matrice de f serait alors $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$
- \impliedby : Si 0 est une valeur propre double utiliser la trigonalisation pour conclure.

Chapitre 3

Transvections vectorielles, Dilatations vectorielles et Hyperplans

3.1 Transvection vectorielle

3.1.1 Définition

Soit ϕ une forme linéaire non nulle définie sur un espace vectoriel E .

Alors

- $H = \ker(\phi)$ est un hyperplan de E .
- On prend $\vec{a} \in H = \ker(\phi)$
- On appelle transvection associée au couple (ϕ, \vec{a}) l'application

$$\begin{aligned} \tau_{(\phi, \vec{a})} : E &\longrightarrow E \\ \vec{x} &\longmapsto \tau_{(\phi, \vec{a})}(\vec{x}) = \vec{x} + \phi(\vec{x})\vec{a} \end{aligned}$$

3.1.2 Propriétés en dimension finie ou infinie

1. $\tau_{(\phi, \vec{a})} = Id + \phi \cdot \vec{a}$ où $\phi \in E^* - \{\Theta\}$ et $\vec{a} \in H = \ker(\phi)$
2. $\tau_{(\phi, \vec{a})}$ est un endomorphisme de E
3. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection



il existe un hyperplan $H \subset E$ tel que $\begin{cases} u|_H = Id \\ \text{Im}(u - Id) \subset H \end{cases}$

4. Une transvection est bijective et son endomorphisme réciproque est $\tau_{(\phi, \vec{a})}^{-1} = \tau_{(\phi, -\vec{a})}$
5. Une transvection u admet pour polynôme minimal :
 - $X - 1$ si $u = Id_E$
 - $(X - 1)^2$ si $u \neq Id_E$

6. • Une transvection u admet une seule valeur propre 1.
 - Le sous espace propre associé à cette unique valeur propre 1 est
 - ◊ E si $u = Id_E$
 - ◊ $H = Ker(\phi)$ si $u \neq Id_E$
7. le conjugué dans $\mathcal{GL}(E)$ de u est une transvection.
8. L'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan H muni de la loi \circ de composition des applications est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{GL}(E), \circ)$
9. $(T(H), \circ)$ est isomorphe au groupe additif $(H, +)$

3.1.3 Propriétés en dimension finie

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$

1. Si $n = 2$

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) - \{Id\}$ est une transvection

\Updownarrow

il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle

$$T_2 = Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Si $n \geq 3$

- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) - \{Id\}$ est une transvection

\Updownarrow

il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle

$$T_n = Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n + E_{n-1,n}$$

- $u \in \mathcal{SL}(E)$ c'est-à-dire $det(u) = 1$
- u est non diagonalisable.

3. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) - \{Id\}$ est une transvection

\Updownarrow

il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle

$$Mat(u, \mathcal{B}) = T_n(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \text{ avec } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}^*$$

4. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) - \{Id\}$ est une transvection

\Updownarrow

$$\begin{cases} rang(u - id) = 1 \\ \chi_u = (X - 1)^n \end{cases}$$

5. Quand \mathbb{K} est infini, toute transvection différente de Id s'écrit comme composée de deux endomorphismes diagonalisables inversibles

3.1.4 Théorème fondamental des transvections ♡♡♡

Si E a une dimension finie $n \geq 2$ alors le groupe $\mathcal{GL}(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.

3.2 Dilatation vectorielle

3.2.1 Définition

Soit ϕ une forme linéaire non nulle définie sur un espace vectoriel E .

Alors

- $H = \ker(\phi)$ est un hyperplan de E .
- On prend $\vec{a} \notin H = \ker(\phi)$
- On appelle dilatation associée au couple (ϕ, \vec{a}) l'application

$$\begin{aligned} \delta_{(\phi, \vec{a})} : E &\longrightarrow E \\ \vec{x} &\longmapsto \delta_{(\phi, \vec{a})}(\vec{x}) = \vec{x} + \phi(\vec{x})\vec{a} \end{aligned}$$

3.2.2 Propriétés en dimension finie ou infinie

1. $\delta_{(\phi, \vec{a})} = Id + \phi \cdot \vec{a}$ où $\phi \in E^* - \{0\}$ et $\vec{a} \notin H = \ker(\phi)$
2. $\delta_{(\phi, \vec{a})}$ est un endomorphisme de E
3. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une dilatation

\Leftrightarrow

il existe un hyperplan $H \subset E$ et il existe un réel $\lambda \notin \{0; 1\}$ tel que

$$\begin{cases} u|_H = Id \\ E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - \lambda Id) \end{cases} \text{ c'est-à-dire } Sp(u) = \{1; \lambda\}$$

4. On parle alors de dilatation de rapport λ
5. Une dilatation de rapport λ est bijective et son endomorphisme réciproque est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$
6. Une dilatation de rapport λ admet un polynôme minimal qui est $(X - 1)(X - \lambda)$

3.2.3 Propriétés en dimension finie

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$

1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) - \{Id\}$ est une dilatation

\Leftrightarrow

il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle

$$D_n = Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{n,n} \text{ avec } \lambda = \det(u) \in \mathbb{K} - \{0; 1\}$$

2. Deux dilatations sont conjuguées dans $\mathcal{GL}(E)$ si et seulement si elles ont même rapport.

Chapitre 4

Homothéties vectorielles

4.1 Définition

L'homothétie vectorielle h_λ de rapport λ

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & h_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \end{array}$$

est un endomorphisme de \vec{E}

$$\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ h_\lambda(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{u}) + \lambda\vec{v} = \alpha(\lambda\vec{u}) + \lambda\vec{v} = \alpha h_\lambda(\vec{u}) + h_\lambda(\vec{v}). \text{ CQFD.}$$

4.2 Propriétés

4.2.1

Tout sous-espace vectoriel \vec{F} de \vec{E} est globalement invariant par une homothétie vectorielle c'est-à-dire que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^* \quad h_\lambda < \vec{F} > = \vec{F}$

- $h_\lambda < \vec{F} > \subset \vec{F}$?
Soit $\vec{v} \in h_\lambda < \vec{F} >$ donc $\exists \vec{u} \in \vec{F} \quad \vec{v} = h_\lambda(\vec{u})$.
Par conséquent, $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Or $\vec{u} \in \vec{F}$ et \vec{F} est un sous-espace vectoriel donc $\lambda\vec{u} \in \vec{F}$.
Par conséquent, $\vec{v} \in \vec{F}$. CQFD.
- $\vec{F} \subset h_\lambda < \vec{F} >$?
Soit $\vec{v} \in \vec{F}$ alors comme $\lambda \neq 0$ on a $\vec{v} = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \vec{v} \right)$.
Or $\vec{v} \in \vec{F}$ et \vec{F} est un sous-espace vectoriel donc $\vec{u} = \left(\frac{1}{\lambda} \vec{v} \right) \in \vec{F}$.
Par conséquent, $\exists \vec{u} \in \vec{F} \quad \vec{v} = h_\lambda(\vec{u})$ donc $\vec{v} \in h_\lambda < \vec{F} >$. CQFD.

4.2.2 Lemme



Si dans un espace vectoriel \vec{E} , un endomorphisme f laisse globalement invariant toute droite vectorielle \vec{D} de \vec{E} alors $\exists ! \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \forall \vec{u} \in \vec{D} \quad f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

- Soit $\vec{u}_1 \in \vec{D}$ tel que $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$. Comme $f < \vec{D} > = \vec{D}$ donc $f(\vec{u}_1) \in \vec{D}$. Mais \vec{u}_1 est une base de \vec{D} car $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$.
Donc $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1$.
- On ne peut avoir $\lambda_1 = 0$ sinon on aurait $f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 = 0 \vec{u}_1 = \vec{0}$.
A ce moment, $\forall \vec{u} \in \vec{D} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = \alpha \vec{u}_1$ car \vec{u}_1 est une base de \vec{D} .
d'où $f(\vec{u}) = f(\alpha \vec{u}_1) = \alpha f(\vec{u}_1) = \alpha \vec{0} = \vec{0}$ donc $f < \vec{D} > = \{\vec{0}\}$.
Ce qui est impossible car $f < \vec{D} > = \vec{D}$
- Donc si $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$, alors $\exists \lambda_1 \neq 0 \quad f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1$.
- Même si $\vec{u}_1 = \vec{0}$ on prend aussi le même λ_1 car $f(\vec{u}_1) = f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda_1 \vec{0} = \lambda_1 \vec{u}_1$
- Nous allons démontrer que ce λ_1 est le même pour tout autre vecteur $\vec{u}_2 \in \vec{D} - \{\vec{0}\}$.
De façon analogue, $\exists \lambda_2 \neq 0 \quad f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2$.
Mais $\vec{u}_2 \in \vec{D}$ donc $\exists \beta \in \mathbb{R} \quad \vec{u}_2 = \beta \vec{u}_1$ d'où $\lambda_2 \vec{u}_2 = f(\vec{u}_2) = f(\beta \vec{u}_1) = \beta f(\vec{u}_1) = \beta \lambda_1 \vec{u}_1$.
Par conséquent, $\lambda_2 \vec{u}_2 = \beta \lambda_1 \vec{u}_1$ d'où $\lambda_2 \beta \vec{u}_1 = \beta \lambda_1 \vec{u}_1$.
On a donc $(\lambda_2 - \lambda_1) \beta \vec{u}_1 = \vec{0}$ avec $\beta \neq 0$ et $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$.
D'où $(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$ c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2$.
- On a donc démontré que $\exists ! \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \forall \vec{u} \in \vec{D} \quad f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

4.2.3 Corollaire

Les seuls endomorphismes qui rendent globalement invariante une droite vectorielle \vec{D} sont les homothéties vectorielles de \vec{D}

4.2.4 Endomorphismes commutant avec n'importe quel autre endomorphisme



Les seuls endomorphismes qui commutent avec n'importe quel autre endomorphisme sont les homothéties vectorielles.

1. Soit u une homothétie vectorielle.
Démontrer que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall x \in E \quad (x, u(x))$ est liée.
Démontrer que u est une homothétie vectorielle.
3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.
Démontrer que u est une homothétie vectorielle.

Démonstration :

1. Soit u une homothétie vectorielle c'est-à-dire $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad u = \lambda id_E$.
Alors $\forall x \in E \quad (u \circ v)(x) = u(v(x)) = \lambda v(x) = v(\lambda x) = v \circ u(x)$ car v est une application linéaire.

Par conséquent, $\forall x \in E \quad (u \circ v)(x) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$.

On a donc démontré que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall x \in E \quad (x, u(x))$ est liée donc $\forall x \in E \quad \exists \lambda_x \in K \quad u(x) = \lambda_x x$.
Soit un couple (x, y) d'éléments de E . Donc $u(x) = \lambda_x x$ et $u(y) = \lambda_y y$.
- ou bien (x, y) est libre.
Alors $u(x + y) = \lambda_{x+y}x + y$. Mais $u(x + y) = u(x) + u(y)$ car u est linéaire donc $\lambda_{x+y}x + y = \lambda_x x + \lambda_y y$.
Par conséquent, $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$. Or la famille (x, y) est libre.
Donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $(\lambda_{x+y} - \lambda_y) = 0$ d'où $\lambda_x = \lambda_y$.
 - ou bien (x, y) est liée.
 - ou $x \neq 0$
Alors $y = \mu x$ et $u(\mu x) = \lambda_{\mu x}$. or $u(\mu x) = \mu u(x)$ car u est linéaire donc $\lambda_{\mu x} = \mu \lambda_x$.
On obtient $[\lambda_{\mu x} - \mu \lambda_x]x = 0$ avec $x \neq 0$ donc $\lambda_{\mu x} - \mu \lambda_x = 0$ d'où $\lambda_{\mu x} = \mu \lambda_x$.
 - ou $x = 0$
 $u(x) = u(0) = 0 = \lambda 0$ pour n'importe quel λ
 - dans tous les cas $\exists \lambda \in K \quad \forall x \in E \quad u(x) = \lambda x$ donc u est une homothétie vectorielle.
3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = v \circ u$.
soit $x \in E$ et soit p un projecteur sur $\text{Vect}(x)$.
Alors $p(u(x)) = (p \circ u)(x) = (u \circ p)(x) = u(p(x)) = u(x)$ car $p(x) = x$ puisque $x \in \text{Vect}(x)$.
Par conséquent, $u(x) \in \text{Vect}(x)$ donc la famille $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in E$ donc u est une homothétie vectorielle.

4.2.5 Sous-groupe des homothéties vectorielles

L'ensemble des homothéties vectorielles muni de la loi \circ de composition des applications est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de l'espace vectoriel E .

En effet,

1. Toute homothétie vectorielle est une application linéaire de E dans E
2. La composée de deux homothéties vectorielles de rapports respectifs k_1 et k_2 est une homothétie vectorielle de rapport k_2k_1 .

$$h_{k_2} \circ h_{k_1} = h_{k_1} \circ h_{k_2} = h_{k_2k_1}$$

3. id_E est une homothétie vectorielle, c'est h_1 .

4. Toute homothétie vectorielle h_k est bijective et sa bijection réciproque est aussi une homothétie vectorielle c'est $h_{\frac{1}{k}}$ car

$$h_{\frac{1}{k}} \circ h_k = h_k \circ h_{\frac{1}{k}} = h_1 = id_E$$



4.2.6 Exercices

Agrégation Docteurs 20 - Ex 4

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les projecteurs de E .
 - (a) Montrer que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u
 - (b) Montrer que u est une homothétie.
2. Le centre d'un groupe (G, \cdot) est $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G \quad xy = yx\}$
 Déterminer le centre du groupe linéaire $GL(E)$ et celui du groupe spécial linéaire $SL(E)$
 Indication : On pourra utiliser des automorphismes qui sont combinaisons linéaires d'un projecteur et de l'identité id_E
3. Démontrer que les groupes $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$ sont isomorphes si et seulement si $n = \dim(E)$ est impair.

Corrigé

1. Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les projecteurs de E .
 - (a) Soit $\vec{x} \neq \vec{0}$.
 - ◇ Soit p le projecteur de E sur $\text{Vect}(\vec{x})$ donc $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
 - ◇ Par conséquent, $u(\vec{x}) = u[p(\vec{x})] = (u \circ p)(\vec{x}) = (p \circ u)(\vec{x}) = p[u(\vec{x})]$.
 - ◇ Comme $p(u(\vec{x})) \in \text{Vect}(\vec{x})$ alors $\exists \lambda_x \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$
 On peut donc affirmer que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u

- (b) • ou bien $\dim(E) = n = 1$
 les seuls endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 1 sont les homothéties vectorielles.
- ◊ En effet, si u est une homothétie vectorielle de E alors u est un endomorphisme de E .
 - ◊ Réciproquement, si u est un endomorphisme de E .
 Soit $\vec{x} \neq \vec{0}$ alors $E = \text{Vect}(\vec{x})$.
 Donc $u(\vec{x}) \in \text{Vect}(\vec{x})$ donc $\exists \lambda \quad u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
 Soit $\vec{x}' \in \text{Vect}(\vec{x})$ alors $\exists \mu \in \mathbb{R} \quad \vec{x}' = \mu \vec{x}$
 donc $u(\vec{x}') = u(\mu \vec{x}) = \mu u(\vec{x}) = \mu(\lambda \vec{x}) = (\mu \lambda) \vec{x} = (\lambda \mu) \vec{x} = \lambda(\mu \vec{x}) = \lambda \vec{x}'$.
 Par conséquent, u est l'homothétie vectorielle de rapport λ
- ou bien $\dim(E) = n \geq 2$
 Donc E a une base \mathcal{B} ayant n éléments.
- ◊ Soit $\vec{x} \in \mathcal{B}$ donc $\vec{x} \neq \vec{0}$ et \vec{x} est un vecteur propre de u
 donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$
 - ◊ Soit $\vec{x}' \in \mathcal{B}$ tel que $\vec{x}' \neq \vec{x}$. $\vec{x}' \neq \vec{0}$ et \vec{x}' est un vecteur propre de u
 donc $\exists \lambda' \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x}') = \lambda' \vec{x}'$
 - ◊ Comme la sous famille (\vec{x}, \vec{x}') est libre donc $\vec{x} + \vec{x}' \neq \vec{0}$
 donc $\exists \lambda'' \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x} + \vec{x}') = \lambda''(\vec{x} + \vec{x}')$
 - ◊ On a donc $\lambda''(\vec{x} + \vec{x}') = u(\vec{x} + \vec{x}') = u(\vec{x}) + u(\vec{x}') = \lambda \vec{x} + \lambda' \vec{x}'$
 - ◊ Par conséquent, $(\lambda'' - \lambda)\vec{x} + (\lambda'' - \lambda')\vec{x}' = \vec{0}$.
 Or la sous famille (\vec{x}, \vec{x}') est libre donc $\lambda'' - \lambda = 0$ et $\lambda'' - \lambda' = 0$ d'où $\lambda'' = \lambda = \lambda'$
 - ◊ u coïncide avec l'homothétie vectorielle de rapport λ sur tous les vecteurs de la base \mathcal{B} donc u est l'homothétie vectorielle de rapport λ .
2. • Soit $u \in Z(GL(E))$ donc u commute avec tout automorphisme (endomorphisme bijectif) de E .
- ◊ Soit p un projecteur de E . Comme les valeurs propres de p sont 0 et 1, on aura dans une base de E créée à partir de l'union d'une base de $\text{Im}(p)$ et d'une base de $\text{ker}(p)$ une matrice diagonale de p qui aura sur les éléments diagonaux que des 1 et des 0
 - ◊ Alors dans cette base, l'endomorphisme $p + id_E$ aura une matrice diagonale qui aura sur les éléments diagonaux que des 2 et des 1 donc $p + id_E$ a un déterminant $\neq 0$ donc $p + id_E$ est bijectif donc $p + id_E$ est un élément de $GL(E)$
 - ◊ Par conséquent $u \circ (p + id_E) = (p + id_E) \circ u$ donc $u \circ p + u = p \circ u + u$
 - ◊ On en déduit que $u \circ p = p \circ u$ donc u est une homothétie vectorielle.
- Réciproquement, il est évident que toute homothétie vectorielle commute avec tout automorphisme de E .
- Par conséquent, le centre $Z(GL(E))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E
- Le groupe spécial linéaire $SL(E) = \{f \in GL(E) \mid \det(f) = 1\}$ Soit $u \in Z(SL(E))$ donc u commute avec tout automorphisme dont le déterminant vaut 1
- ◊ Soit p un projecteur tel que $\dim(\text{Im}(p)) = k$. Comme les valeurs propres de p sont 0 et 1, on aura dans une base de E créée à partir de l'union d'une base de $\text{Im}(p)$ et d'une base de $\text{ker}(p)$ une matrice diagonale de p qui aura sur les éléments diagonaux que 1 (k fois) et des 0 ($n - k$ fois)
 - ◊ Alors dans cette base, l'endomorphisme $(p + id_E)$ aura une matrice diagonale qui aura sur les éléments diagonaux que des 2 et des 1 donc $\frac{1}{2^k}(p + id_E)$ a un déter-

minant qui vaudra 1 donc $\frac{1}{2^k}(p + id_E)$ est un élément de $SL(E)$

- ◇ en faisant un calcul analogue à la question concernant $Z(GL(E))$ on trouve que $u \circ p = p \circ u$ donc u est une homothétie vectorielle.
- ◇ Par conséquent, $Z(SL(E))$ est formé des homothéties vectorielles h_λ de déterminant 1.
- Or le déterminant d'une homothétie vectorielle de rapport λ est λ^n . Par conséquent, $\lambda^n = 1$ donc λ est une racine n-ième de 1
- ◇ ou bien n est impair alors $Z(SL(E)) = \{h_1 = id_E\}$
- ◇ ou bien n est pair alors $Z(SL(E)) = \{h_1 = id_E; h_{-1} = -id_E\}$

3. • \implies :

Nous allons démontrer la contraposée Supposons que n est pair nous allons démontrer qu'il ne peut exister d'isomorphisme entre $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$.

- ◇ $Z(GL(E)) =$ l'ensemble des homothéties vectorielles $\simeq \mathbb{R}^*$; $Z(SL(E)) = \{h_1; h_{-1}\} \simeq \{-1; 1\}$ donc $Z(SL(E)) \times \mathbb{R}^* = Z(SL(E)) \times Z(\mathbb{R}^*) \simeq \{-1; 1\} \times \mathbb{R}^*$
- ◇ S'il existe un tel isomorphisme entre $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$ alors il existerait un isomorphisme entre \mathbb{R}^* d'élément neutre 1 et $\{-1; 1\} \times \mathbb{R}^*$ d'élément neutre $(1, 1)$
- ◇ Ce n'est pas possible car \mathbb{R}^* a un seul élément d'ordre 2 à savoir -1 car $(-1)^2 = 1$ mais $\{-1; 1\} \times \mathbb{R}^*$ en a trois $= (-1, 1); (-1, -1); (1, -1)$ puisque $(-1, 1) \times (-1, 1) = (1, 1); (-1, -1) \times (-1, -1) = (1, 1); (1, -1) \times (1, -1) = (1, 1)$

• \impliedby :

Supposons n impair. Nous allons construire un isomorphisme entre $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$. Il suffit de prendre

$$\begin{aligned} \phi : SL(E) \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow GL(E) \\ (u, \lambda) &\longmapsto \phi(u, \lambda) = \lambda u \end{aligned}$$

En effet,

- ◇ Soient $(u_1, \lambda_1) \in SL(E) \times \mathbb{R}^*$ et $(u_2, \lambda_2) \in SL(E) \times \mathbb{R}^*$ alors

$$\phi((u_1, \lambda_1) * (u_2, \lambda_2)) = \phi((u_1 \circ u_2, \lambda_1 \lambda_2)) = (\lambda_1 \lambda_2)(u_1 \circ u_2) = \lambda_1 u_1 \circ \lambda_2 u_2 = \phi((u_1, \lambda_1)) \phi((u_2, \lambda_2))$$

donc ϕ est un homomorphisme de groupes.

- ◇ Démontrons maintenant que ϕ est bijective c'est-à-dire que tout élément $v \in GL(E)$ a un antécédent unique (u, λ) par ϕ dans $SL(E) \times \mathbb{R}^*$
- ◇ Comme $v \in GL(E)$ alors $\det(v) \neq 0$.

$$\diamond \begin{cases} v = \phi(u, \lambda) \\ \det(u) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} v = \lambda u \\ \det(u) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} v = \lambda u \\ 1 = \det(u) = \det\left(\frac{1}{\lambda}v\right) = \frac{1}{\lambda^n} \det(v) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = (\det(v))^{\frac{1}{n}} v \\ \lambda = \frac{1}{(\det(v))^{\frac{1}{n}}} \end{cases}$$

- ◇ Par conséquent ϕ est un isomorphisme entre $SL(E) \times \mathbb{R}^*$ et $GL(E)$.
- ◇ L'isomorphisme réciproque est

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : GL(E) &\longrightarrow SL(E) \times \mathbb{R}^* \\ v &\longmapsto \phi^{-1}(v) = \left((\det(v))^{\frac{1}{n}} v, \frac{1}{(\det(v))^{\frac{1}{n}}} \right) \end{aligned}$$

◇

Chapitre 5

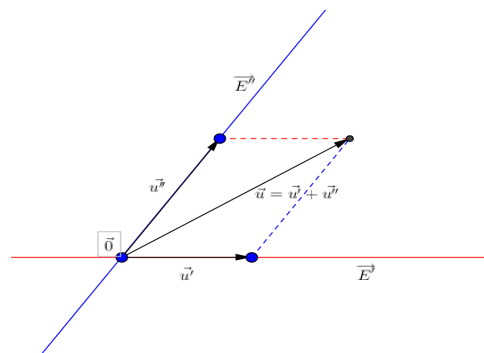
Projecteurs ou projections vectorielles

5.1 Définition

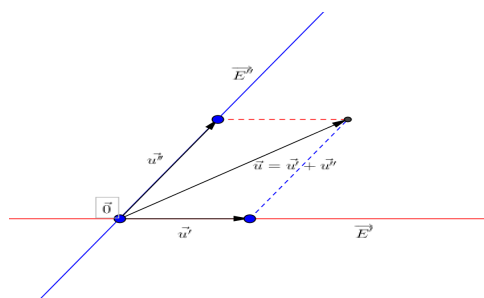
Soient \vec{E}' et \vec{E}'' deux sous espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} .

On appelle projecteur ou projection vectorielle de \vec{E} sur \vec{E}' parallèlement à \vec{E}'' l'application

$$p : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E}' \\ \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' & \longmapsto & p(\vec{u}) = \vec{u}' \end{array}$$



5.2 Propriétés



Si p est la projection vectorielle p de \vec{E} sur \vec{E}' parallèlement à \vec{E}'' alors

1. p est une application linéaire de \vec{E} dans \vec{E}
2. $p \circ p = p$
3. $\ker(p) = \vec{E}''$
4. $\text{Im}(p) = \vec{E}'$
5. L'ensemble des vecteurs invariants par p est $\text{Inv}(p) = \vec{E}'$

5.2.1 Démonstration

1. Soit $\vec{u} \in E$ alors $\exists \vec{u}' \in E'$ $\exists \vec{u}'' \in E''$ $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$
 Soit $\vec{v} \in E$ alors $\exists \vec{v}' \in E'$ $\exists \vec{v}'' \in E''$ $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$
 Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned} p(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) &= p(\alpha(\vec{u}' + \vec{u}'') + \beta(\vec{v}' + \vec{v}'')) \\ &= p(\underbrace{\alpha\vec{u}' + \beta\vec{v}'}_{\in E'} + \underbrace{\alpha\vec{u}'' + \beta\vec{v}''}_{\in E''}) \\ &= \alpha\vec{u}' + \beta\vec{v}' = \alpha p(\vec{u}) + \beta p(\vec{v}) \end{aligned}$$

donc $p \in \mathcal{L}(E)$

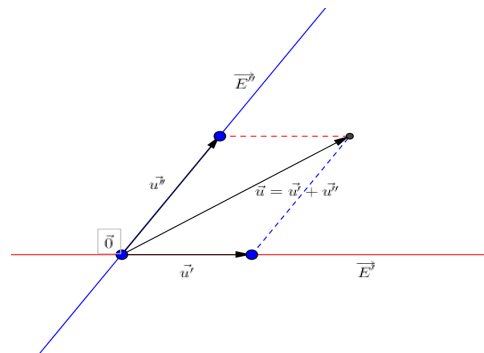
2. $\forall \vec{u} \in E$ $(p \circ p)(\vec{u}) = p(p(\vec{u})) = p(p(\vec{u}' + \vec{u}'')) = p(\vec{u}') = \vec{u}' = p(\vec{u})$ donc $p \circ p = p$
3. $\vec{u} \in \ker(p) \iff p(\vec{u}) = \vec{0} \iff \vec{u}' = \vec{0} \iff \vec{u} = \vec{u}'' \iff \vec{u} \in E''$ donc $\ker(p) = E''$
4. (a) Soit $\vec{v} \in \text{Im}(p)$ donc $\exists \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \in E$ $\vec{v} = p(\vec{u})$ donc $\vec{v} = \vec{u}'$ donc $\vec{v} \in E'$
 donc $\text{Im}(p) \subset E'$.
 (b) Soit $\vec{u} \in E'$ alors $\vec{u}' = \underbrace{\vec{u}'}_{\in E'} + \underbrace{\vec{0}}_{\in E''}$ donc $\vec{u}' = p(\vec{u}')$ donc $\vec{u}' \in \text{Im}(p)$.
 Par conséquent, $E' \subset \text{Im}(p)$
 (c) Comme $\text{Im}(p) \subset E'$ et $E' \subset \text{Im}(p)$ donc $\text{Im}(p) = E'$
5. $\vec{u} \in \text{Inv}(p) \iff p(\vec{u}) = \vec{u} \iff \vec{u}' = \vec{u} \iff \vec{u}'' = \vec{0} \iff \vec{u} \in E'$
 Donc $\text{Inv}(p) = E'$

5.3 Propriété caractéristique d'un projecteur ♡♡♡

Soit p un endomorphisme de \vec{E} .

$$p \text{ est un projecteur de } \vec{E} \iff p \circ p = p$$

p est alors la projection vectorielle de \vec{E} sur $\vec{E}' = \text{Im}(p)$ parallèlement à $\vec{E}'' = \text{ker}(p)$



5.3.1 Démonstration

1. \implies :

démonstration faite dans le paragraphe précédent.

2. \impliedby :

Supposons que $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$

(a) $\text{Im}(p) \cap \text{ker}(p) = \{\vec{0}\}$?

Soit $\vec{u} \in \text{Im}(p) \cap \text{ker}(p)$ donc $\exists \vec{w} \in E$ $\vec{u} = p(\vec{w})$ et $p(\vec{u}) = \vec{0}$

alors $\vec{0} = p(\vec{u}) = p(p(\vec{w})) = p^2(\vec{w}) = p(\vec{w}) = \vec{u}$ donc $\text{Im}(p) \cap \text{ker}(p) \subset \{0\}$.

Or $\{\vec{0}\} \subset \text{Im}(p) \cap \text{ker}(p)$

Donc $\text{Im}(p) \cap \text{ker}(p) = \{\vec{0}\}$

(b) $E = \text{Im}(p) + \text{ker}(p)$?

Soit $\vec{u} \in E$ alors $\vec{u} = \underbrace{p(\vec{u})}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{(\vec{u} - p(\vec{u}))}_{\in \text{ker}(p)}$

(c) En conclusion, $E = \text{Im}(p) \oplus \text{ker}(p)$

3.

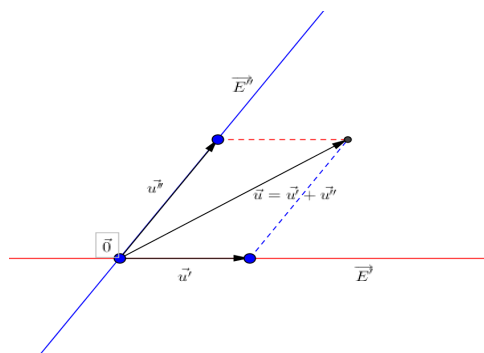
$$\begin{aligned} p : E = \text{Im}(p) \oplus \text{ker}(p) &\longrightarrow \text{Im}(p) = \text{Inv}(p) \\ \vec{u} = p(\vec{u}) + \vec{u} - p(\vec{u}) &\longmapsto p(\vec{u}) \end{aligned}$$

Par conséquent, p est la projection vectorielle de E sur $\text{Im}(p) = \text{Inv}(p)$ parallèlement à $\text{ker}(p)$

5.4 Projecteurs associés p et $Id_E - p$

Soit p un projecteur de E alors :

1. $g = Id_E - p$ est aussi un projecteur.
2. $ker(Id_E - p) = Im(p)$
3. $Im(Id_E - p) = ker(p)$
4. g est donc la projection vectorielle de E sur $\vec{E}^{\prime} = ker(p)$ parallèlement à $\vec{E}^{\prime\prime} = Im(p)$.
5. p et $g = Id_E - p$ sont dits projecteurs associés.



Démonstration

1. $g \circ g = (Id - p) \circ (Id - p) = (Id \circ Id) - (Id \circ p) - (p \circ Id) + (p \circ p)$
On obtient $g \circ g = Id - p - p + p = Id - p = g$ donc g est aussi un projecteur.
2. • Soit $\vec{u} \in ker(Id - p)$ alors $(Id - p)(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\vec{u} - p(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\vec{u} = p(\vec{u})$ donc $\vec{u} \in Im(p)$.
Par conséquent, $ker(Id - p) \subset Im(p)$
• Soit $\vec{v} \in Im(p)$ alors $\exists \vec{u} \in E \quad \vec{v} = p(\vec{u})$.
Alors $(Id - p)(\vec{v}) = (Id - p)(p(\vec{u})) = (Id \circ p)(\vec{u}) - (p \circ p)(\vec{u}) = p(\vec{u}) - p(\vec{u}) = \vec{0}$
donc $\vec{v} \in ker(Id - p)$.
Par conséquent, $Im(p) \subset ker(Id - p)$
• Comme $ker(Id - p) \subset Im(p)$ et $Im(p) \subset ker(Id - p)$ alors $ker(Id - p) = Im(p)$
3. La démonstration de $Im(Id_E - p) = ker(p)$ est analogue à la précédente en permutant les rôles de p et de $(Id - p)$.

5.5 Somme de projecteurs



5.5.1 Projecteur construit à partir de deux projecteurs p et q

Soient p et q des projecteurs d'un espace vectoriel \vec{E} tels que $q \circ p = \theta$.
Soit $r = p + q - p \circ q$

1. Démontrer que r est un projecteur.
2. Démontrer que $Im(r) = Im(p) \oplus Im(q)$.
3. Démontrer que $Ker(r) = Ker(p) \cap Ker(q)$

1. r est un projecteur car

- r est un endomorphisme de E puisque
 - ◊ $p + q$ est un endomorphisme de \vec{E} car
 - * p et q sont des endomorphismes de \vec{E}
 - * la loi $+$ est interne dans l'anneau $(\mathcal{L}(\vec{E}), +, \circ)$
 - ◊ $p \circ q$ est un endomorphisme de \vec{E} car
 - * p et q sont des endomorphismes de \vec{E}
 - * la loi \circ est interne dans l'anneau $(\mathcal{L}(\vec{E}), +, \circ)$
 - ◊ r est la différence de ces deux endomorphismes et la loi $+$ est interne dans l'anneau $(\mathcal{L}(\vec{E}), +, \circ)$

- $r \circ r = r$.

En effet, $r \circ r = [p + q - (p \circ q)] \circ [p + q - (p \circ q)]$

$$r \circ r = p \circ [p + q - (p \circ q)] + q \circ [p + q - (p \circ q)] - (p \circ q) \circ [p + q - (p \circ q)]$$

$$r \circ r = p \circ p + p \circ q - p \circ (p \circ q) + q \circ p + q \circ q - q \circ (p \circ q) - (p \circ q) \circ p - (p \circ q) \circ q + (p \circ q) \circ (p \circ q)$$

$$r \circ r = p \circ p + p \circ q - p \circ p \circ q + q \circ p + q \circ q - q \circ p \circ q - p \circ q \circ p - p \circ q \circ q + p \circ q \circ p \circ q$$

Or $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$ car p et q sont des projecteurs. De plus $q \circ p = \theta$.

$$\text{Donc } r \circ r = p + p \circ q - p \circ q + \theta + q - \theta \circ q - p \circ \theta - p \circ q + p \circ \theta \circ q$$

$$\text{On a bien } r \circ r = p + p \circ q - p \circ q + \theta + q - \theta - \theta - p \circ q + \theta = p + q - p \circ q = r$$

CQFD.

2. Démontrons que $Im(r) = Im(p) \oplus Im(q)$.

- Démontrons tout d'abord que la somme $F = Im(p) + Im(q)$ est directe c'est-à-dire que $Im(p) \cap Im(q) = \{\vec{0}\}$.
 - ◊ Comme $Im(p)$ et $Im(q)$ sont tous deux des sous-espaces vectoriels de E alors ils contiennent tous les deux le vecteur $\vec{0}$ donc $\{\vec{0}\} \subset Im(p) \cap Im(q)$
 - ◊ Réciproquement, si $\vec{v} \in Im(p) \cap Im(q)$ alors $\vec{v} \in Im(p)$ et $\vec{v} \in Im(q)$
Par conséquent, $\exists \vec{u}_1 \in E \quad \vec{v} = p(\vec{u}_1)$ et $\exists \vec{u}_2 \in E \quad \vec{v} = q(\vec{u}_2)$.
Alors $p(\vec{u}_1) = q(\vec{u}_2)$ d'où $q(p(\vec{u}_1)) = q(q(\vec{u}_2))$

Donc $\vec{0} = q(\vec{u}_2)$ car $q \circ p = \theta$ et $q \circ q = q$ puisque q est un projecteur.

On en déduit que $\vec{v} = \vec{0}$ donc $Im(p) \cap Im(q) \subset \{\vec{0}\}$

◇ La somme $F = Im(p) + Im(q)$ devient directe car $Im(p) \cap Im(q) = \{\vec{0}\}$.

• Reste donc à prouver que $Im(r) = F = Im(p) \oplus Im(q)$

◇

◇

◇

•

3. Démontrons que $Ker(r) = Ker(p) \cap Ker(q)$

5.5.2 CNS pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur. ♡♡♡

Soient p et q des projecteurs tous deux non nuls d'un espace vectoriel \vec{E}

1. Montrer que $p + q$ n'est pas forcément un projecteur de \vec{E} .
2. Calculer $(p + q) \circ (p + q)$
3. Démontrer que :

$$p + q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q + q \circ p = \Theta \iff \begin{cases} p \circ q = \Theta \\ q \circ p = \Theta \end{cases}$$

4. Si $p + q$ est un projecteur alors
 - ◇ $Im(p + q) = Im(p) + Im(q)$ avec $Im(p) \cap Im(q) = \{\vec{0}\}$
 - ◇ $ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$
 - ◇ $p + q$ est la projection vectorielle sur $Im(p) \oplus Im(q)$ parallèlement à $Ker(p) \cap Ker(q)$

1. Soit p un projecteur alors $p + p$ n'est pas un projecteur de \vec{E} car $(2p) \circ (2p) = 4p^2 = 4p \neq 2p$ car $p \neq \Theta$.
2. $(p + q) \circ (p + q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + p \circ q + q \circ p + q$
3. (a) $p + q$ est un projecteur $\iff (p + q) \circ (p + q) = p + q$
 $\iff p + p \circ q + q \circ p + q = p + q \iff p \circ q + q \circ p = \Theta$
 - (b) • Supposons que $p \circ q = q \circ p = \Theta$ alors il est évident que $p \circ q + q \circ p = \Theta$
 - Supposons que $p \circ q + q \circ p = \Theta$ donc $\begin{cases} p \circ (p \circ q + q \circ p) = p \circ \Theta = \Theta \\ (p \circ q + q \circ p) \circ p = \Theta \circ p = \Theta \end{cases}$
 d'où $\begin{cases} p \circ q + p \circ q \circ p = \Theta \\ p \circ q \circ p + q \circ p = \Theta \end{cases}$ donc $p \circ q - q \circ p = \Theta$
 Par conséquent, on a $\begin{cases} p \circ q + q \circ p = \Theta \\ p \circ q - q \circ p = \Theta \end{cases}$ d'où $\begin{cases} p \circ q = \Theta \\ q \circ p = \Theta \end{cases}$
4. Supposons que $p + q$ est un projecteur,
 - Démontrons que $Im(p + q) = Im(p) + Im(q)$ avec $Im(p) \cap Im(q) = \{\vec{0}\}$.
 - Démontrons ensuite que $ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$.

5.6 Expression analytique d'un projecteur en dimension 3.



Pour déterminer une expression analytique de p projection vectorielle de \vec{E} sur \vec{E}' parallèlement à \vec{E}''

- On vérifie d'abord que $\vec{E} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$
- On trouve l'expression analytique en partant de l'équivalence logique suivante :

$$\text{Soient } \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ Alors } \vec{v}' = p(\vec{v}) \iff \begin{cases} \vec{v}' \in \vec{E}' \\ \vec{v}' - \vec{v} \in \vec{E}'' \end{cases}$$

5.6.1 Exemple

Soit \vec{E} un espace vectoriel de dimension 3 étant rapporté à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{u}'' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soient \vec{P} le plan vectoriel de base (\vec{u}, \vec{u}') et \vec{D} la droite vectorielle de base (\vec{u}'')

1. Vérifier que $\vec{P} \cap \vec{D} = \{\vec{0}\}$
2. Définir analytiquement la projection vectorielle p de \vec{E} sur \vec{P} parallèlement à \vec{D} .
3. Définir analytiquement la projection vectorielle q de \vec{E} sur \vec{D} parallèlement à \vec{P} .

Corrigé

1. • On sait que $\{\vec{0}\} \subset \vec{P}$ et que $\{\vec{0}\} \subset \vec{D}$ donc $\{\vec{0}\} \subset \vec{P} \cap \vec{D}$

- Reste à démontrer que $\vec{P} \cap \vec{D} \subset \{\vec{0}\}$.

$$\text{Soit } \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{P} \cap \vec{D} \text{ donc } \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{P} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{D}$$

$$\text{d'où } \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases} \text{ et } \exists \gamma \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2\gamma \\ y = -\gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

$$\text{Par conséquent, } \begin{cases} -\alpha + \beta = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases} \text{ d'où, } \begin{cases} -\gamma - \gamma = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \text{ donc } \vec{v} = \vec{0}$$

- En conclusion, $\vec{P} \cap \vec{D} = \{\vec{0}\}$
- Par conséquent, \vec{P} et \vec{D} sont en somme directe dans \vec{E} . Or $\dim(\vec{E}) = \dim(\vec{P}) + \dim(\vec{D})$ donc $\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{D}$

2. Soient $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ Alors $\vec{v}' = p(\vec{v}) \iff \vec{v}' \in \vec{P}$ et $\vec{v} - \vec{v}' \in \vec{D}$ donc

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x' = -\alpha + \beta \\ y' = \beta \\ z' = \alpha \end{cases} \quad \text{et } \exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x' - x = 2\gamma \\ y' - y = -\gamma \\ z' - z = \gamma \end{cases}$$

d'où $x' - y' + z' = 0$ et $\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x' - x = 2\gamma \\ -y' + y = \gamma \\ z' - z = \gamma \end{cases}$ Donc $4\gamma = -x + y - z$ donc

$$\begin{cases} x' - x = 2 \left(\frac{1}{4} \right) (-x + y - z) \\ -y' + y = -\frac{1}{4}(-x + y - z) \\ z' - z = \frac{1}{4}(-x + y - z) \end{cases}$$

La projection vectorielle p de \vec{E} sur \vec{P} parallèlement à \vec{D} est donc définie analytiquement

$$\text{par } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y - z) \\ y' = \frac{1}{4}(-x + 5y - z) \\ z' = \frac{1}{4}(-x + y + 3z) \end{cases}$$

Le plan vectoriel \vec{P} avait pour équation cartésienne : $X - Y + Z = 0$

3. Soient $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$

Alors $\vec{v}'' = q(\vec{v}) \iff \vec{v}'' \in \vec{D}$ et $\vec{v} - \vec{v}'' \in \vec{P}$

$$\text{donc } \exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x'' = 2\gamma \\ y'' = -\gamma \\ z'' = \gamma \end{cases}$$

et $(x - x'') - (y - y'') + (z - z'') = 0$ car $\vec{P} : X - Y + Z = 0$.

Donc $2\gamma - x - (-\gamma - y) + (\gamma - z) = 0$ d'où $4\gamma = x - y + z$.

La projection vectorielle p de \vec{E} sur \vec{D} parallèlement à \vec{P} est donc définie analytiquement

$$\text{par } \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}(x - y + z) \\ y'' = -\frac{1}{4}(x - y + z) \\ z'' = \frac{1}{4}(x - y + z) \end{cases}$$

5.7 Exemples de projecteurs

1. Cas $E = \vec{D}$

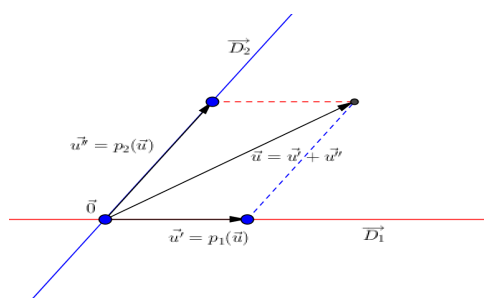
Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : $\{\vec{0}\}$ et \vec{D} .

- La projection vectorielle de \vec{D} sur \vec{D} parallèlement à $\{\vec{0}\}$ c'est-à-dire : $Id_{\vec{D}}$
- La projection vectorielle de \vec{D} sur $\{\vec{0}\}$ parallèlement à \vec{D} c'est-à-dire : Θ

2. Cas $E = \vec{P}$

Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : $\{\vec{0}\}$ et \vec{P}

- La projection vectorielle p_1 de \vec{P} sur \vec{P} parallèlement à $\{\vec{0}\}$ c'est-à-dire : $Id_{\vec{P}}$
- La projection vectorielle p_2 de \vec{P} sur $\{\vec{0}\}$ parallèlement à \vec{P} c'est-à-dire : Θ
- Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : \vec{D}_1 et \vec{D}_2 avec $\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2 = \{\vec{0}\}$

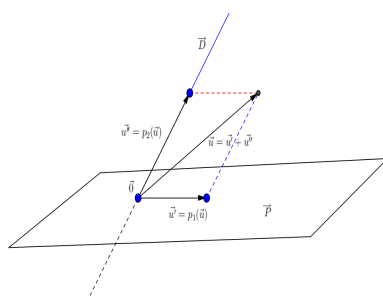


- La projection vectorielle de \vec{P} sur \vec{D}_1 parallèlement à \vec{D}_2
- La projection vectorielle de \vec{P} sur \vec{D}_2 parallèlement à \vec{D}_1

3. Cas $E = \vec{E}_3$

Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : $\{\vec{0}\}$ et \vec{E}_3

- La projection vectorielle de \vec{E}_3 sur \vec{E}_3 parallèlement à $\{\vec{0}\}$ c'est-à-dire : $Id_{\vec{E}_3}$
- La projection vectorielle de \vec{E}_3 sur $\{\vec{0}\}$ parallèlement à \vec{E}_3 c'est-à-dire : Θ
- Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : \vec{D} et \vec{P} avec $\vec{D}_1 \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$



- La projection vectorielle p_1 de \vec{E}_3 sur \vec{P} parallèlement à \vec{D} .
- La projection vectorielle p_2 de \vec{E}_3 sur \vec{D} parallèlement à \vec{P} .

5.8 Représentation matricielle

Valeurs propres d'un projecteur



Si p est la projection vectorielle de \vec{E} par rapport à \vec{E}' parallèlement à \vec{E}'' avec p différent de l'application nulle θ et différent de id_E .

Supposons $\dim(\vec{E}) = n$. alors

- Comme $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$ avec (e_1, \dots, e_k) base de \vec{E}' et (e_{k+1}, \dots, e_n) base de \vec{E}'' alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de \vec{E} .

Comme $\begin{cases} \forall i \in [1; k] & p(e_i) = e_i \\ \forall i \in [k+1; n] & p(e_i) = \vec{0} \end{cases}$ on a donc

$$Mat(s, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} p(\vec{e}_1) & \cdots & p(\vec{e}_k) & p(\vec{e}_{k+1}) & \cdots & p(\vec{e}_n) \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_k \\ e_{k+1} \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

- donc p est diagonalisable et $Spectre(p) = \{0; 1\}$

- Le polynôme minimal de p est $\mu_p = X^2 - X = X(X - 1)$

- Comme p est un projecteur (ou une projection vectorielle) de \vec{E} alors $p \circ p = p$ ou encore $p^2 - p = \theta$ alors $X^2 - X$ de racines 0 et 1 est un polynôme annulateur de p donc $Spectre(p) \subset \{0; 1\}$
- Comme $X^2 - X = X(X - 1)$ les diviseurs de $X^2 - X$ sont X et $X - 1$
- Or $p \neq \theta$ donc X n'est pas un polynôme annulateur de p .
- De même, $p \neq Id$ donc $X - 1$ n'est pas un polynôme annulateur de p
- Par conséquent, le polynôme minimal est $\mu(p) = \chi_p = X^2 - X$ donc on retrouve que $Spectre(p) = \{0; 1\}$



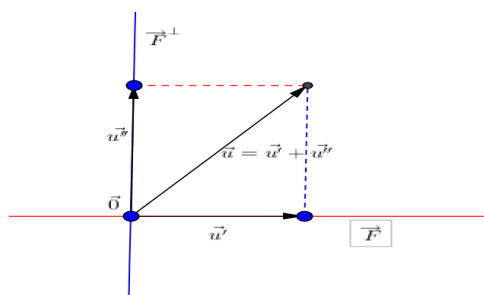
5.9 Projections vectorielles orthogonales

5.9.1 Théorème et définition

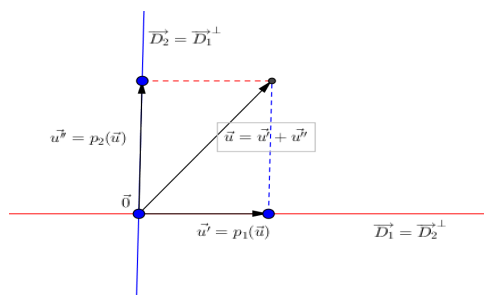
Soit \vec{E} est un **espace préhilbertien réel** muni d'un produit scalaire noté \cdot .

Soit \vec{F} est un **sous-espace vectoriel de dimension finie** de \vec{E} Alors

1. il existe un et un seul supplémentaire de \vec{F} dans \vec{E} orthogonal à F en l'occurrence $\vec{F}^\perp = \{\vec{v} \in \vec{E} / \forall \vec{u} \in \vec{F} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}$ appelé **LE supplémentaire orthogonal** de \vec{F} dans \vec{E} .
2. De plus, $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
3. On appelle **projection vectorielle orthogonale** de \vec{E} sur \vec{F} la projection vectorielle de \vec{E} sur \vec{F} parallèlement à \vec{F}^\perp qu'on peut noter p_F .



5.9.2 Exemples de projections orthogonales en $\dim(E) = 2$



Cas 1 : $\vec{F} = \vec{P}$ donc $\vec{F}^\perp = \{\vec{0}\}$ et $p = Id_{\vec{P}}$

Cas 2 : $\vec{F} = \{0\}$ donc $\vec{F}^\perp = \vec{P}$ et $p = \Theta$

Cas 3 : $\vec{F} = \vec{D}_1$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et donc d'équation : $bx - ay = 0$

alors $\vec{F}^\perp = \vec{D}_2$ de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et donc d'équation : $ax + by = 0$

donc p est la projection vectorielle orthogonale de \vec{P} sur \vec{D}

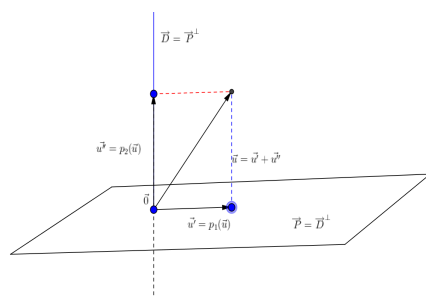
5.9.3 Exemples de projections orthogonales en $\dim(E) = 3$

Cas 1 : $\vec{F} = \{0\}$ donc $\vec{F}^\perp = \vec{E}_3$ et $p = \Theta$

Cas 2 : $\vec{F} = \vec{E}_3$ donc $\vec{F}^\perp = \{0\}$ et $p = Id_{\vec{E}_3}$

Cas 3 : $\vec{F} = \vec{P}$ d'équation : $ax + by + cz = 0$ alors $\vec{F}^\perp = \vec{D}$ de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et donc d'équation : $ax + by = 0$ donc p_1 est la projection vectorielle orthogonale de \vec{E}_3 sur \vec{P}

Cas 4 : $\vec{F} = \vec{D}$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\vec{F}^\perp = \vec{P}$ d'équation : $ax + by + cz = 0$ donc p_2 est la projection vectorielle orthogonale de \vec{E}_3 sur \vec{D}



5.9.4 Propriétés

Caractérisations

1. Un projecteur p est une projection vectorielle orthogonale si et seulement si $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont orthogonaux.

2. Le projeté orthogonal p_F d'un vecteur $\vec{x} \in E$ est caractérisé par :
$$\begin{cases} p_F(\vec{x}) \in \vec{F} \\ \vec{x} - p_F(\vec{x}) \in \vec{F}^\perp \end{cases}$$

Expression dans une base orthonormée

Si \vec{F} a une **base orthonormée** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ alors

$$p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p \langle \vec{x}, \vec{u}_k \rangle \vec{u}_k$$

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur \vec{x} à un hyperplan H et de la distance de \vec{x} à H

Si $\vec{E} \neq \{\vec{0}\}$ et si H est un hyperplan de E , si on appelle \vec{n} un vecteur normal à H alors

$$H = [\text{Vect}(\vec{n})]^\perp$$

$$\forall \vec{x} \in \vec{E} \quad p_H(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

$$d(\vec{x}, H) = \frac{|\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

Projeter \vec{x} sur H revient à lui enlever sa composante selon H^\perp

Soit p' la projection orthogonale de E sur H^\perp

- Alors $\forall x \in E \quad \vec{x} = p_H(\vec{x}) + p'(\vec{x})$
- De plus, comme $\frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n}$ est un vecteur normé de base de H^\perp alors $p'(\vec{x}) = \left\langle x, \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n}$
- Comme $p'(x) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$ alors $p_H(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$

Représentation matricielle d'une projection orthogonale

Si \vec{E} a une **base orthonormée** $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

Si \vec{F} a une **base orthonormée** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Si (U_1, U_2, \dots, U_p) sont les vecteurs colonnes respectifs des coordonnées de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ alors la matrice de p_f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{k=1}^p U_k {}^t U_k$$

Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'une projection orthogonale

Soit \vec{E} un espace préhilbertien réel.

Soit \vec{F} un sous-espace vectoriel de \vec{E} **de dimension finie** alors la distance d'un élément $\vec{x} \in \vec{E}$ à \vec{F} est

$$d(\vec{x}, \vec{F}) = \inf_{\vec{f} \in \vec{F}} d(\vec{x}, \vec{f}) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = d(\vec{x}, p_F(\vec{x}))$$

De plus, d'après le théorème de Pythagore, l'on a :

$$d(x, \vec{F})^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|p_F(\vec{x})\|^2$$

5.10 Exercices

5.10.1 Projecteurs commutant

Soient p et q des projecteurs de \vec{E} tels que $p \circ q = q \circ p$.
Démontrer que $p \circ q$ est un projecteur et en déterminer l'image et le noyau en fonction de ceux de p et de q .

5.10.2 Projection vectorielle

Soit un plan vectoriel \vec{P} de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Soit p un endomorphisme de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

Déterminer la nature de p ainsi que les deux sous-espaces vectoriels de \vec{P} qui la caractérisent.

Corrigé :

$$1. M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } p \circ p = p.$$

2. Par conséquent, p est la projection vectorielle de \vec{P} sur $Im(p)$ parallèlement à $ker(p)$.

$$3. \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ker(p) \iff p(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 5x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par conséquent, $ker(p)$ est la droite vectorielle d'équation $x = 0$ c'est-à-dire $\vec{D}_{\vec{j}}$

4. D'après le théorème du rang, $dim(\vec{P}) = dim(ker(p)) + dim(Im(p))$ donc $2 = 1 + dim(Im(p))$ d'où $dim(Im(p)) = 1$ donc $Im(p)$ est une droite vectorielle.

$Im(p)$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f(\vec{i}, \vec{j}))$. Or $f(\vec{i}) = \vec{i} + 5\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{0}$ donc $Im(f)$ est engendré par $\vec{i} + 5\vec{j}$. Alors $Im(f) = \vec{D}_{\vec{i}+5\vec{j}}$

5. En conclusion, p est la projection vectorielle de \vec{P} sur $\vec{D}_{\vec{i}+5\vec{j}}$ parallèlement à $\vec{D}_{\vec{j}}$.

5.10.3 Projection vectorielle

Soit un plan vectoriel \vec{P} de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Soit p un endomorphisme de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

Déterminer la nature de p ainsi que les deux sous-espaces vectoriels de \vec{P} qui la caractérisent.

Corrigé :

1. On remarque que

- $p(\vec{i}) = \vec{i}$
- $p(\vec{j}) = \vec{0}$ donc $\vec{j} \in ker(p)$ donc $ker(p) \neq \{\vec{0}\}$ donc p non injective donc non bijective.

$$2. M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } p \circ p = p.$$

3. Par conséquent, p est la projection vectorielle de \vec{P} sur $Im(p)$ parallèlement à $ker(p)$.

$$4. \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ker(p) \iff p(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \iff x = 0$$

Par conséquent, $ker(p)$ est la droite vectorielle d'équation $x = 0$ c'est-à-dire $\vec{D}_{\vec{j}}$

5. D'après le théorème du rang, $dim(\vec{P}) = dim(ker(p)) + dim(Im(p))$ donc $2 = 1 + dim(Im(p))$ d'où $dim(Im(p)) = 1$ donc $Im(p)$ est une droite vectorielle.

$Im(p)$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f(\vec{i}, \vec{j}))$. Or $p(\vec{i}) = \vec{i}$ et $p(\vec{j}) = \vec{0}$ donc $Im(p)$ est engendré par \vec{i} . Alors $Im(f) = \vec{D}_{\vec{i}}$

6. En conclusion, p est la projection vectorielle de \vec{P} sur $\vec{D}_{\vec{i}}$ parallèlement à $\vec{D}_{\vec{j}}$.

5.10.4 Agrégation Docteurs 20 - Ex 4

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les projecteurs de E .
 - (a) Montrer que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u
 - (b) Montrer que u est une homothétie.
2. Le centre d'un groupe (G, \cdot) est $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G \quad xy = yx\}$
 Déterminer le centre du groupe linéaire $GL(E)$ et celui du groupe spécial linéaire $SL(E)$
 Indication : On pourra utiliser des automorphismes qui sont combinaisons linéaires d'un projecteur et de l'identité id_E
3. Démontrer que les groupes $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$ sont isomorphes si et seulement si $n = \dim(E)$ est impair.

Corrigé

1. Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les projecteurs de E .
 - (a) Soit $\vec{x} \neq \vec{0}$.
 - ◇ Soit p le projecteur de E sur $Vect(\vec{x})$ donc $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
 - ◇ Par conséquent, $u(\vec{x}) = u[p(\vec{x})] = (u \circ p)(\vec{x}) = (p \circ u)(\vec{x}) = p[u(\vec{x})]$.
 - ◇ Comme $p(u(\vec{x})) \in Vect(\vec{x})$ alors $\exists \lambda_x \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$
 On peut donc affirmer que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u
 - (b) • ou bien $\dim(E) = n = 1$
 les seuls endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 1 sont les homothéties vectorielles.
 - ◇ En effet, si u est une homothétie vectorielle de E alors u est un endomorphisme de E .
 - ◇ Réciproquement, si u est un endomorphisme de E .
 Soit $\vec{x} \neq \vec{0}$ alors $E = Vect(\vec{x})$.
 Donc $u(\vec{x}) \in Vect(\vec{x})$ donc $\exists \lambda \quad u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
 Soit $\vec{x}' \in Vect(\vec{x})$ alors $\exists \mu \in \mathbb{R} \quad \vec{x}' = \mu \vec{x}$
 donc $u(\vec{x}') = u(\mu \vec{x}) = \mu u(\vec{x}) = \mu(\lambda \vec{x}) = (\mu \lambda) \vec{x} = (\lambda \mu) \vec{x} = \lambda(\mu \vec{x}) = \lambda \vec{x}'$.
 Par conséquent, u est l'homothétie vectorielle de rapport λ
 - ou bien $\dim(E) = n \geq 2$
 Donc E a une base \mathcal{B} ayant n éléments.
 - ◇ Soit $\vec{x} \in \mathcal{B}$ donc $\vec{x} \neq \vec{0}$ et \vec{x} est un vecteur propre de u
 donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$
 - ◇ Soit $\vec{x}' \in \mathcal{B}$ tel que $\vec{x}' \neq \vec{x}$. $\vec{x}' \neq \vec{0}$ et \vec{x}' est un vecteur propre de u
 donc $\exists \lambda' \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x}') = \lambda' \vec{x}'$
 - ◇ Comme la sous famille (\vec{x}, \vec{x}') est libre donc $\vec{x} + \vec{x}' \neq \vec{0}$
 donc $\exists \lambda'' \in \mathbb{R} \quad u(\vec{x} + \vec{x}') = \lambda''(\vec{x} + \vec{x}')$
 - ◇ On a donc $\lambda''(\vec{x} + \vec{x}') = u(\vec{x} + \vec{x}') = u(\vec{x}) + u(\vec{x}') = \lambda \vec{x} + \lambda' \vec{x}'$
 - ◇ Par conséquent, $(\lambda'' - \lambda)\vec{x} + (\lambda'' - \lambda')\vec{x}' = \vec{0}$.
 Or la sous famille (\vec{x}, \vec{x}') est libre donc $\lambda'' - \lambda = 0$ et $\lambda'' - \lambda' = 0$ d'où $\lambda'' = \lambda = \lambda'$
 - ◇ u coïncide avec l'homothétie vectorielle de rapport λ sur tous les vecteurs de la base \mathcal{B} donc u est l'homothétie vectorielle de rapport λ .

2. • Soit $u \in Z(GL(E))$ donc u commute avec tout automorphisme (endomorphisme bijectif) de E .
- ◊ Soit p un projecteur de E . Comme les valeurs propres de p sont 0 et 1, on aura dans une base de E créée à partir de l'union d'une base de $Im(p)$ et d'une base de $ker(p)$ une matrice diagonale de p qui aura sur les éléments diagonaux que des 1 et des 0
 - ◊ Alors dans cette base, l'endomorphisme $p + id_E$ aura une matrice diagonale qui aura sur les éléments diagonaux que des 2 et des 1 donc $p + id_E$ a un déterminant $\neq 0$ donc $p + id_E$ est bijectif donc $p + id_E$ est un élément de $GL(E)$
 - ◊ Par conséquent $u \circ (p + id_E) = (p + id_E) \circ u$ donc $u \circ p + u = p \circ u + u$
 - ◊ On en déduit que $u \circ p = p \circ u$ donc u est une homothétie vectorielle.
- Réciproquement, il est évident que toute homothétie vectorielle commute avec tout automorphisme de E .
- Par conséquent, le centre $Z(GL(E))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E
- Le groupe spécial linéaire $SL(E) = \{f \in GL(E) \mid det(f) = 1\}$ Soit $u \in Z(SL(E))$ donc u commute avec tout automorphisme dont le déterminant vaut 1
- ◊ Soit p un projecteur tel que $dim(Im(p)) = k$. Comme les valeurs propres de p sont 0 et 1, on aura dans une base de E créée à partir de l'union d'une base de $Im(p)$ et d'une base de $ker(p)$ une matrice diagonale de p qui aura sur les éléments diagonaux que 1 (k fois) et des 0 ($n - k$ fois)
 - ◊ Alors dans cette base, l'endomorphisme $(p + id_E)$ aura une matrice diagonale qui aura sur les éléments diagonaux que des 2 et des 1 donc $\frac{1}{2^k}(p + id_E)$ a un déterminant qui vaudra 1 donc $\frac{1}{2^k}(p + id_E)$ est un élément de $SL(E)$
 - ◊ en faisant un calcul analogue à la question concernant $Z(GL(E))$ on trouve que $u \circ p = p \circ u$ donc u est une homothétie vectorielle.
 - ◊ Par conséquent, $Z(SL(E))$ est formé des homothéties vectorielles h_λ de déterminant 1.
- Or le déterminant d'une homothétie vectorielle de rapport λ est λ^n . Par conséquent, $\lambda^n = 1$ donc λ est une racine n -ième de 1
- ◊ ou bien n est impair alors $Z(SL(E)) = \{h_1 = id_E\}$
 - ◊ ou bien n est pair alors $Z(SL(E)) = \{h_1 = id_E; h_{-1} = -id_E\}$
3. • \implies :
 Nous allons démontrer la contraposée Supposons que n est pair nous allons démontrer qu'il ne peut exister d'isomorphisme entre $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$.
- ◊ $Z(GL(E)) =$ l'ensemble des homothéties vectorielles $\simeq \mathbb{R}^*$; $Z(SL(E)) = \{h_1; h_{-1}\} \simeq \{-1; 1\}$ donc $Z(SL(E)) \times \mathbb{R}^* = Z(SL(E)) \times Z(\mathbb{R}^*) \simeq \{-1; 1\} \times \mathbb{R}^*$
 - ◊ S'il existe un tel isomorphisme entre $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$ alors il existerait un isomorphisme entre \mathbb{R}^* d'élément neutre 1 et $\{-1; 1\} \times \mathbb{R}^*$ d'élément neutre $(1, 1)$
 - ◊ Ce n'est pas possible car \mathbb{R}^* a un seul élément d'ordre 2 à savoir -1 car $(-1)^2 = 1$ mais $\{-1; 1\} \times \mathbb{R}^*$ en a trois $(-1, 1); (-1, -1); (1, -1)$ puisque $(-1, 1) \times (-1, 1) = (1, 1); (-1, -1) \times (-1, -1) = (1, 1); (1, -1) \times (1, -1) = (1, 1)$
- \impliedby :
 Supposons n impair. Nous allons construire un isomorphisme entre $GL(E)$ et $SL(E) \times \mathbb{R}^*$. Il suffit de prendre

$$\begin{aligned} \phi : SL(E) \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow GL(E) \\ (u, \lambda) &\longmapsto \phi(u, \lambda) = \lambda u \end{aligned}$$

En effet,

- ◇ Soient $(u_1, \lambda_1) \in SL(E) \times \mathbb{R}^*$ et $(u_2, \lambda_2) \in SL(E) \times \mathbb{R}^*$ alors

$$\phi((u_1, \lambda_1) \star (u_2, \lambda_2)) = \phi((u_1 \circ u_2, \lambda_1 \lambda_2)) = (\lambda_1 \lambda_2)(u_1 \circ u_2) = \lambda_1 u_1 \circ \lambda_2 u_2 = \phi((u_1, \lambda_1)) \phi((u_2, \lambda_2))$$

donc ϕ est un homomorphisme de groupes.

- ◇ Démontrons maintenant que ϕ est bijective c'est-à-dire que tout élément $v \in GL(E)$ a un antécédent unique (u, λ) par ϕ dans $SL(E) \times \mathbb{R}^*$
- ◇ Comme $v \in GL(E)$ alors $\det(v) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \diamond \left\{ \begin{array}{l} v = \phi(u, \lambda) \\ \det(u) = 1 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} v = \lambda u \\ \det(u) = 1 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} v = \lambda u \\ 1 = \det(u) = \det\left(\frac{1}{\lambda}v\right) = \frac{1}{\lambda^n} \det(v) \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} u = (\det(v))^{\frac{1}{n}} v \\ \lambda = \frac{1}{(\det(v))^{\frac{1}{n}}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- ◇ Par conséquent ϕ est un isomorphisme entre $SL(E) \times \mathbb{R}^*$ et $GL(E)$.
- ◇ L'isomorphisme réciproque est

$$\begin{aligned} \phi^{-1}: GL(E) &\longrightarrow SL(E) \times \mathbb{R}^* \\ v &\longmapsto \phi^{-1}(v) = \left((\det(v))^{\frac{1}{n}} v, \frac{1}{(\det(v))^{\frac{1}{n}}} \right) \end{aligned}$$

◇

Chapitre 6

Symétries vectorielles

6.1 Involution

Soit f une application d'un ensemble E dans E .

$$f \text{ est involutive} \iff f \circ f = Id_E \iff f \text{ est bijective et } f = f^{-1}$$

6.2 Remarque



Comme une involution est bijective alors les endomorphismes involutifs d'un espace vectoriel \vec{E} sont des automorphismes involutifs.

6.3 Homothéties vectorielles involutives

Les seules homothéties vectorielles qui sont involutives sont h_1 ou $Id_{\vec{E}}$ et $h_{-1} = -Id_{\vec{E}}$

6.3.1 Démonstration

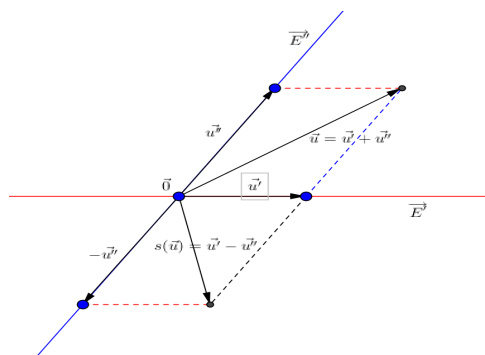
$$h_\alpha \text{ est involutive} \iff h_\alpha \circ h_\alpha = Id_{\vec{E}} = h_1 \iff h_{\alpha^2} = h_1 \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

6.4 Définition d'une symétrie vectorielle

Soient \vec{E}' et \vec{E}'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} .

On appelle symétrie vectorielle de \vec{E} sur \vec{E}' parallèlement à \vec{E}'' l'application

$$s : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' & \longmapsto & s(\vec{u}) = \vec{u}' - \vec{u}'' \end{array}$$



6.5 Propriétés

Soient \vec{E}' et \vec{E}'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} .

Soit s la symétrie vectorielle de \vec{E} sur \vec{E}' parallèlement à \vec{E}'' .

Soit p la projection vectorielle de \vec{E} sur \vec{E}' parallèlement à \vec{E}'' .

Alors

1. $s = 2p - id_{\vec{E}}$ et donc s est un endomorphisme de \vec{E} .
2. $s^2 = s \circ s = id_{\vec{E}}$ donc s est un automorphisme involutif de \vec{E}
3. L'ensemble des vecteurs invariants de s noté $Inv(s)$:

$$Inv(s) = \{\vec{u} / s(\vec{u}) = \vec{u}\} = \ker(s - id_{\vec{E}}) = \vec{E}'$$

4. L'ensemble des vecteurs transformés en leur opposés par s noté $Opp(s)$ est :

$$Opp(s) = \{\vec{u} / s(\vec{u}) = -\vec{u}\} = \ker(s + id_{\vec{E}}) = \vec{E}''$$

6.5.1 Démonstration

1. On sait que tout $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ et ce de façon unique avec $\vec{u}' \in \vec{E}'$ et $\vec{u}'' \in \vec{E}''$.
Alors $s(\vec{u}) = \vec{u}' - \vec{u}'' = p(\vec{u}) - [\vec{u} - p(\vec{u})] = 2p(\vec{u}) - \vec{u} = (2p - id_{\vec{E}})(\vec{u})$
donc $s = 2p - id_{\vec{E}}$ et par conséquent s est un endomorphisme de \vec{E} .

2. $s^2 = (2p - id) \circ (2p - id) = 4p^2 - 4p \circ id + Id^2 = 4p - 4p + id$ donc $s^2 = s \circ s = id_{\vec{E}}$
donc s est un automorphisme involutif de \vec{E}
3. $\vec{u} \in Inv(s) \iff s(\vec{u}) = \vec{u} \iff (2p - id)(\vec{u}) = \vec{u} \iff 2p(\vec{u}) - \vec{u} = \vec{u}$
 $\iff 2p(\vec{u}) = 2\vec{u} \iff p(\vec{u}) = \vec{u} \iff \vec{u} \in Inv(p) = \vec{E}'$ donc
 $Inv(s) = \{\vec{u} / s(\vec{u}) = \vec{u}\} = \vec{E}'$
4. $\vec{u} \in Opp(s) \iff s(\vec{u}) = -\vec{u} \iff (2p - id)(\vec{u}) = -\vec{u} \iff 2p(\vec{u}) - \vec{u} = -\vec{u}$
 $\iff 2p(\vec{u}) = \vec{0} \iff p(\vec{u}) = \vec{0} \iff \vec{u} \in ker(p) = \vec{E}''$ donc
 $Opp(s) = \{\vec{u} / s(\vec{u}) = -\vec{u}\} = \vec{E}''$

6.6 Caractérisation d'un endomorphisme involutif

Soit s un endomorphisme involutif de \vec{E}
c'est-à-dire une application linéaire de \vec{E} dans \vec{E} tel que $s \circ s = id_E$

Alors

- s est la symétrie vectorielle de \vec{E} sur $Inv(s)$ parallèlement à $Opp(s)$
- L'ensemble des vecteurs invariants par f :

$$Inv(s) = \{\vec{u} \in \vec{E} / s(\vec{u}) = \vec{u}\} = ker(s - Id)$$

est un sous-espace vectoriel de \vec{E} .

- L'ensemble des vecteurs transformés en leur opposés par f :

$$Opp(s) = \{\vec{u} \in \vec{E} / s(\vec{u}) = -\vec{u}\} = ker(s + Id)$$

est un sous espace vectoriel de \vec{E}

6.6.1 Démonstration

- Soit $\vec{E}' = Inv(s)$ alors $\vec{u} \in \vec{E}' \iff s(\vec{u}) = \vec{u} \iff (s - id)(\vec{u}) = \vec{0} \iff \vec{u} \in ker(s - id)$
Par conséquent, comme $s - id$ est un endomorphisme alors son noyau est un sous-espace vectoriel de \vec{E} donc \vec{E}' est un sous-espace vectoriel de \vec{E}
- Soit $\vec{E}'' = Opp(s)$ alors
 $\vec{u} \in \vec{E}'' \iff s(\vec{u}) = -\vec{u} \iff (s + id)(\vec{u}) = \vec{0} \iff \vec{u} \in ker(s + id)$
Par conséquent, comme $s + id$ est un endomorphisme alors son noyau est un sous-espace vectoriel de \vec{E} donc \vec{E}'' est un sous-espace vectoriel de \vec{E}
- Démontrons que $\vec{E} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$
— Soit $\vec{u}' = \frac{1}{2}[\vec{u} + s(\vec{u})]$ et $\vec{u}'' = \frac{1}{2}[\vec{u} - s(\vec{u})]$
— $s(\vec{u}') = s(\frac{1}{2}[\vec{u} + s(\vec{u})]) = \frac{1}{2}[s(\vec{u}) + \underbrace{(s \circ s)(\vec{u})}_{id_E}] = \frac{1}{2}[s(\vec{u}) + \vec{u}] = \vec{u}'$ donc $\vec{u}' \in \vec{E}'$
— $s(\vec{u}'') = s(\frac{1}{2}[\vec{u} - s(\vec{u})]) = \frac{1}{2}[s(\vec{u}) - \underbrace{(s \circ s)(\vec{u})}_{id_E}] = \frac{1}{2}[s(\vec{u}) - \vec{u}] = -\vec{u}''$ donc $\vec{u}'' \in \vec{E}''$
— $\vec{w} \in \vec{E}' \cap \vec{E}'' \iff s(\vec{w}) = \vec{w}$ et $s(\vec{w}) = -\vec{w} \iff \vec{w} = -\vec{w} \iff \vec{w} = \vec{0}$.
Donc $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{\vec{0}\}$

- Par conséquent $\vec{E} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$
- Pour tout $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ alors $s(\vec{u}) = \vec{u}' - \vec{u}''$ donc s est la symétrie vectorielle de \vec{E} sur $\text{Inv}(s)$ parallèlement à $\text{Opp}(s)$

6.7 Expression analytique



Pour déterminer une expression analytique de s symétrie vectorielle de \vec{E} par rapport à \vec{E}' parallèlement à \vec{E}''

- On vérifie d'abord que $\vec{E} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$
- Par exemple, en dimension $n = 3$,
On trouve l'expression analytique en partant de l'équivalence logique suivante :

$$\text{Soient } \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ Alors } \vec{v}' = s(\vec{v}) \iff \begin{cases} \vec{v} + \vec{v}' \in \vec{E}' \\ \vec{v}' - \vec{v} \in \vec{E}'' \end{cases}$$

6.8 Lien entre projection vectorielle et symétrie vectorielle



Soient p et s des endomorphismes d'un espace vectoriel \vec{E} tels que $p = \frac{1}{2}(s + id)$ ou encore tels que $s = 2p - id$

1. Déterminer $p \circ p$
2. Démontrer l'équivalence logique suivante :

$$p \text{ projecteur} \iff s = 2p - id \text{ est involutif (c'est-à-dire une symétrie vectorielle)}$$

6.8.1 Corrigé

1. $p \circ p = \frac{1}{2}(s + id) \circ \frac{1}{2}(s + id) = \frac{1}{4}(s \circ s + s \circ id + id \circ s + id \circ id) = \frac{1}{4}(s \circ s + s + s + id)$
donc $p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + id)$

$$\begin{aligned}
2. \ p \text{ projecteur} &\iff p \circ p = p \iff \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + id) = \frac{1}{2}(s + id) \\
&\iff \frac{1}{4}(s \circ s + id) = \frac{1}{2} id \iff \frac{1}{4}(s \circ s) = \frac{1}{4} id \iff s \circ s = id \\
&\iff s \text{ est involutif ou une symétrie vectorielle}
\end{aligned}$$

6.9 Exemples de symétries vectorielles

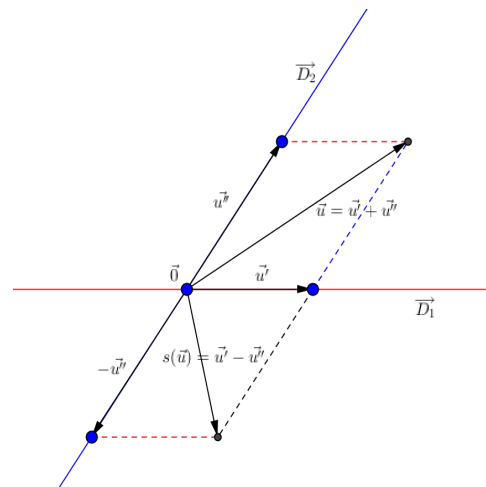
1. Cas $E = \vec{D}$

Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : $\{\vec{0}\}$ et \vec{D} .

- La symétrie vectorielle de \vec{D} par rapport à \vec{D} parallèlement à $\{\vec{0}\}$ c'est-à-dire : $Id_{\vec{D}}$ ou h_1
- La symétrie vectorielle de \vec{D} par rapport à $\{\vec{0}\}$ parallèlement à \vec{D} c'est-à-dire : $-Id_{\vec{D}}$ ou h_{-1}

2. Cas $E = \vec{P}$

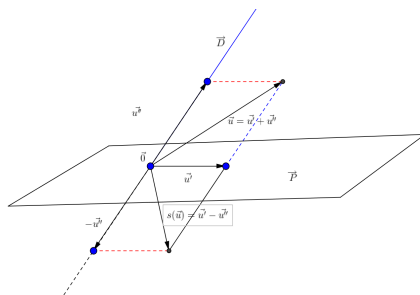
- Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : $\{\vec{0}\}$ et \vec{D}
 - La symétrie vectorielle s_1 de \vec{P} par rapport à \vec{P} parallèlement à $\{\vec{0}\}$ c'est-à-dire : $Id_{\vec{P}}$
 - La symétrie vectorielle s_2 de \vec{P} par rapport à $\{\vec{0}\}$ parallèlement à \vec{P} c'est-à-dire : $-Id_{\vec{E}_3}$
- Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : \vec{D}_1 et \vec{D}_2 avec $\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2 = \{\vec{0}\}$



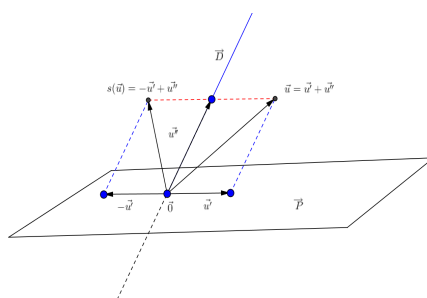
- La symétrie vectorielle de \vec{P} par rapport à \vec{D}_1 parallèlement à \vec{D}_2
- La symétrie vectorielle de \vec{P} par rapport à \vec{D}_2 parallèlement à \vec{D}_1

3. Cas $E = \vec{E}_3$

- Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : $\{\vec{0}\}$ et \vec{E}_3
 - La symétrie vectorielle de \vec{E}_3 par rapport à \vec{E}_3 parallèlement à $\{\vec{0}\}$ c'est-à-dire : $Id_{\vec{E}_3}$
 - La symétrie vectorielle de \vec{E}_3 par rapport à $\{\vec{0}\}$ parallèlement à \vec{E}_3 c'est-à-dire : $-Id_{\vec{E}_3}$
- Les sous espaces vectoriels supplémentaires sont : \vec{D} et \vec{P} avec $\vec{D}_1 \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$
 - La symétrie vectorielle s_1 de \vec{E}_3 par rapport à \vec{P} parallèlement à \vec{D} .



- La symétrie vectorielle s_2 de \vec{E}_3 par rapport à \vec{D} parallèlement à \vec{P} .



6.10 Représentation matricielle

Valeurs propres d'une symétrie vectorielle



Si s est la symétrie vectorielle de \vec{E} par rapport à \vec{E}' parallèlement à \vec{E}'' avec différent de $-id_E$ et différent de id_E .

Supposons $\dim(\vec{E}) = n$. alors

- Comme $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$ avec (e_1, \dots, e_k) base de \vec{E}' et (e_{k+1}, \dots, e_n) base de \vec{E}'' alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de \vec{E} .

Comme $\begin{cases} \forall i \in [1; k] & s(e_i) = e_i \\ \forall i \in [k+1; n] & s(e_i) = -e_i \end{cases}$ on a donc

$$Mat(s, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} s(\vec{e}_1) & \cdots & s(\vec{e}_k) & s(\vec{e}_{k+1}) & \cdots & s(\vec{e}_n) \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_k \\ \vec{e}_{k+1} \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

- donc s est diagonalisable
- $Sp(s) = \{-1; 1\}$
- Le polynôme minimal de s est $\mu_s = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$
 - Comme s est une symétrie vectorielle de E alors $s \circ s = id_E$ ou encore $s^2 - id = \theta$ alors $X^2 - 1$ de racines -1 et 1 est un polynôme annulateur de p donc $Sp(p) \subset \{-1; 1\}$
 - Comme $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$ les diviseurs de $X^2 - 1$ sont $X + 1$ et $X - 1$
 - Or $s \neq -id_E$ donc $X + 1$ n'est pas un polynôme annulateur de s .
 - De même, $s \neq Id$ donc $X - 1$ n'est pas un polynôme annulateur de s
 - Par conséquent, $\mu(s) = X^2 - 1$.



6.11 Exercices

6.11.1 Symétrie vectorielle



Soit un plan vectoriel \vec{P} de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Soit s un endomorphisme de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

Déterminer la nature de s ainsi que les deux sous-espaces vectoriels de \vec{P} qui la caractérisent.

Corrigé :

1. On remarque que

- $s(\vec{i}) = \vec{j}$
- $s(\vec{j}) = \vec{i}$

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $s \circ s = \text{id}$.

3. Par conséquent, s est la symétrie vectorielle de \vec{P} par rapport à $\text{Inv}(s)$ parallèlement à $\text{Opp}(s)$.

4. $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Inv}(s) \iff s(\vec{u}) = \vec{u} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases} \iff y = x$

Par conséquent, l'ensemble des vecteurs invariants $\text{Inv}(s)$ est la droite vectorielle d'équation $y = x$ c'est-à-dire $\vec{D}_{\vec{i}+\vec{j}}$

5. $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Opp}(s) \iff s(\vec{u}) = -\vec{u} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \iff y = -x$

Par conséquent, l'ensemble $\text{Opp}(s)$ est la droite vectorielle d'équation $y = -x$ c'est-à-dire $\vec{D}_{-\vec{i}+\vec{j}}$

6. On remarque que si P était un plan vectoriel euclidien avec \mathcal{B} comme base orthonormée alors $\text{Inv}(s)$ et $\text{Opp}(s)$ sont deux droites vectorielles orthogonales et s serait la symétrie vectorielle orthogonale de \vec{P} par rapport à $\vec{D}_{\vec{i}+\vec{j}}$.



6.11.2



Le plan vectoriel \vec{P} étant rapporté à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ on considère les endomorphismes p et q ayant respectivement pour matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

1. Démontrer que p et q sont des projections vectorielles et déterminer les sous-espaces vectoriels qui les caractérisent.
2. On considère l'ensemble F des endomorphismes $f_{(a,b)}$ de \vec{P} tels que $f_{(a,b)} = ap + bq$
 - (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $f_{(a,b)}$ soit bijective.
 - (b) Démontrer que (F, \circ) est un groupe abélien.
 - (c) Démontrer que $f_{(1,-1)}$ et $f_{(-1,1)}$ sont des symétries vectorielles dont on déterminera les sous espaces vectoriels caractéristiques.

Corrigé

$$1. \bullet A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ donc } p \circ p = p.$$

• Par conséquent, p est la projection vectorielle de \vec{P} sur $Im(p)$ parallèlement à $ker(p)$.

$$\bullet \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ker(p) \iff p(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) = 0 \\ \frac{1}{2}(x+y) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $ker(p)$ est la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$ c'est-à-dire $\vec{D}_{-\vec{i}+\vec{j}}$

• D'après le théorème du rang,

$dim(\vec{P}) = dim(ker(p)) + dim(Im(p))$ donc $2 = 1 + dim(Im(p))$ d'où $dim(Im(p)) = 1$ donc $Im(p)$ est une droite vectorielle.

$Im(p)$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f(\vec{i}, \vec{j}))$.

Or $f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \neq \vec{0}$ donc $Im(f)$ est engendré par $\vec{i} + \vec{j}$.

Alors $Im(f) = \vec{D}_{\vec{i}+\vec{j}}$ d'équation cartésienne $x - y = 0$

• En conclusion, p est la projection vectorielle de \vec{P} sur $\vec{D}_{\vec{i}+\vec{j}}$ parallèlement à $\vec{D}_{-\vec{i}+\vec{j}}$.

• On remarque que $B = I - A$ donc $q = id - p$ donc q est la projection vectorielle de \vec{P} sur $\vec{D}_{-\vec{i}+\vec{j}}$ parallèlement à $\vec{D}_{\vec{i}+\vec{j}}$.

2. On considère l'ensemble F des endomorphismes $f_{(a,b)}$ de \vec{P} tels que $f_{(a,b)} = ap + bq$

$$(a) f_{(a,b)} \text{ est bijective} \iff \det(M(f_{(a,b)})) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a+b) & \frac{1}{2}(a-b) \\ \frac{1}{2}(a-b) & \frac{1}{2}(a+b) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iff 4ab \neq 0 \iff ab \neq 0$$

(b) Pour démontrer que (F, \circ) est un groupe abélien, nous allons démontrer que c'est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(\vec{P})$ des automorphismes de \vec{P} .

- Comme $ab \neq 0$ alors $F \subset GL(\vec{P})$.
- $F \neq \emptyset$ car $id_{\vec{P}} \in F$ puisque $id = 1.p + 1.q = f_{(1,1)}$
- Soient $f_{(a,b)} \in F$; $f_{(a',b')} \in F$ alors $f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')} = (ap + bq) \circ (a'p + b'q)$
 $= aa'p \circ p + ab'p \circ q + ba'q \circ p + bb'q \circ q = aa'p + ab'p \circ q + ba'q \circ p + bb'q$.
 Or $p + q = id$ est un projecteur donc forcément $p \circ q = q \circ p = \theta$.
 Donc $f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')} = aa'p + bb'q = f_{(aa',bb')}$ donc $f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')} \in F$. CQFD.
- Soit $f_{(a,b)} \in F$ donc $f_{(a,b)} = ap + bq$.
 De plus, comme $ab \neq 0$ on sait que $f_{(a,b)}$ est bijective donc sa bijection réciproque

$$\left(f_{(a,b)}\right)^{-1} \text{ existe.}$$

On remarque que :

$$(ap + bq) \circ \left(\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q\right) = a\left(\frac{1}{a}\right)p \circ p + a\left(\frac{1}{b}\right)p \circ q + b\left(\frac{1}{a}\right)q \circ p + b\left(\frac{1}{b}\right)q \circ q.$$

Or $p + q = id$ est un projecteur donc forcément $p \circ q = q \circ p = \theta$.

Par conséquent,

$$(ap + bq) \circ \left(\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q\right) = p + q = id \text{ donc } \left(f_{(a,b)}\right)^{-1} = f_{\left(\frac{1}{a} \quad \frac{1}{b}\right)} \in F$$

- $f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')} = f_{(aa',bb')} = f_{(a'a,b'b)} = f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)}$
 - On a ainsi démontré que (F, \circ) est un sous-groupe abélien du groupe linéaire $GL(\vec{P})$.
- (c) • $f_{(1,-1)} = p - q = p - (id - p) = 2p - id$ donc $f_{(1,-1)}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{D}_{\vec{i}+\vec{j}}$ parallèlement à $\vec{D}_{-\vec{i}+\vec{j}}$.
- $f_{(-1,1)} = -p + q = -(id - q) + q = 2q - id$ donc $f_{(-1,1)}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{D}_{-\vec{i}+\vec{j}}$ parallèlement à $\vec{D}_{\vec{i}+\vec{j}}$.



6.11.3

Le plan vectoriel \vec{P} étant rapporté à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ on considère l'endomorphisme s ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

1. Démontrer que s est un automorphisme involutif.
2. Déterminer $Im(s)$
3. Déterminer $Opp(s) = \{\vec{u} / s(\vec{u}) = -\vec{u}\}$
4. Démontrer que $\vec{P} = Im(s) \oplus Opp(s)$

Chapitre 7

Endomorphismes nilpotents

7.1 Définition

Soit E un \mathbb{K} - ev où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent lorsque $\exists p \in \mathbb{N}^* \quad f^p = \theta$ et $f^{p-1} \neq \theta$.

1. Alors $\forall q \geq p$ on a $f^q = \theta$ car $f^q = f^{q-p} \circ f^p = f^{q-p} \circ \theta = \theta$
2. Le plus petit entier $p \geq 1$ vérifiant $f^p = \theta$ et $f^{p-1} \neq \theta$ s'appelle l'indice de f .

7.2 Propriétés

Soit E un \mathbb{K} - ev où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de dimension finie n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^p = \theta$ et $f^{p-1} \neq \theta$.

Alors

1. f n'est pas bijectif
2. $\exists x \in E \quad f^{p-1}(x) \neq 0$.
3. La famille $\mathcal{F} = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.
4. $\forall n \geq p \quad f^n = \theta$
5. $Im(f^{p-1}) \subset ker(f)$

7.2.1 Démonstration

1. Comme $f^p = \theta$ alors $det(f^p) = 0$ donc $(det(f))^p = 0$ d'où $det(f) = 0$.
Par conséquent, f n'est pas bijectif.
2. Comme $f^{p-1} \neq \theta$ donc $\exists x \in E \quad f^{p-1}(x) \neq 0$.
Alors $\vec{x} \neq \vec{0}$ sinon comme f^{p-1} est un endomorphisme on aurait $f^{p-1}(\vec{x}) = f^{p-1}(\vec{0}) = \vec{0}$.
3. Considérons alors la famille $\mathcal{F} = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$.
Cette famille est libre car soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ réels tels que
 $\alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 f(\vec{x}) + \alpha_2 f^2(\vec{x}) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}$ alors
 $f^{p-1}(\alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 f(\vec{x}) + \alpha_2 f^2(\vec{x}) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(\vec{x})) = f^{p-1}(\vec{0}) = \vec{0}$
donc $\alpha_1 f^{p-1}(\vec{x}) + \alpha_2 f^p(\vec{x}) + \alpha_2 f^{p+1}(\vec{x}) + \dots + \alpha_{p-1} f^{2p-2}(\vec{x}) = \vec{0}$ Or $f^q = \theta$ dès que
 $q \geq p$ donc $\alpha_1 f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}$ or $f^{p-1}(\vec{x}) \neq 0$ donc $\alpha_1 = 0$. Donc $\alpha_2 f(\vec{x}) + \alpha_2 f^2(\vec{x}) + \dots +$

$$\alpha_{p-1} f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

On réitère le procédé précédent en composant par f^{p-2} et on obtiendra ainsi $\alpha_2 = 0$.

On réitère le procédé et on obtiendra successivement $\alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0$

4. \mathcal{F} est une famille libre de p éléments dans un espace vectoriel de dimension finie n qui est le nombre d'éléments des bases de \vec{E} donc c'est le nombre maximum d'éléments d'une famille libre donc $p \leq n$.
Donc comme $n \geq p$ on a aussi $f^n = f^p \circ f^{n-p} = \theta \circ f^{n-p} = \theta$.
5. Soit $y \in \text{Im}(f^{p-1})$ donc $\exists x \in E \quad y = f^{p-1}(x)$ alors $f(y) = f(f^{p-1}(x)) = f^p(x) = 0$

7.3 Valeur propre d'un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}ev$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de dimension finie $n \geq 1$.

f un endomorphisme nilpotent non nul d'indice $p \leq n \iff \chi_f = \det(X \text{id} - f) = X^n$.

La seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent f est 0 et $f^n = \theta$

Démonstration

1. \implies :

Soit λ une valeur propre de f donc λ^p est une valeur propre de f^p .

Or $f^p = \theta$ donc $\lambda^p = 0$. Par conséquent $\lambda = 0$.

Donc le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

De plus, $\chi_f(X) = \det(X \text{id} - f) = X^n$.

2. \impliedby :

Si $\chi_f = \det(X \text{id} - f) = X^n$ alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_f(f) = \theta$ donc $f^n = \theta$.

7.4 Autres propriétés classiques - Centrale PSI II - 2019

7.4.1 Endomorphisme d'indice de nilpotence $p = 1$

Si $p = 1$ alors le seul endomorphisme nilpotent f est l'endomorphisme nul $f = \theta$.

7.4.2 Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
2. Vérifier que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.
3. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.
4. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2
5. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

7.5 Exercices

7.5.1 Matrice carrée idempotente

Soit A une matrice carrée idempotente c'est-à-dire telle que $A^2 = A$

- Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 2 \quad A^n = A$
- Soit $B = 2A - I$. Démontrer que $B^2 = I$.

Corrigé

- Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 2 \quad A^n = A$
 - La propriété est vraie au rang 2 car $A^2 = A$
 - Supposons qu'à un certain rang $n \geq 2$ l'on ait $A^n = A$ alors $A^{n+1} = A^n A = A^2 = A$
 - La propriété étant initialisée en 2 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$
- Soit $B = 2A - I$ alors

$$B^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2AI - I(2A) + I^2 = 4A - 2A - 2A + I = I.$$

7.5.2 Exercice

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto \phi(X) = XB - BX \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- Démontrer que si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = A$ alors
 - $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n B - BA^n = nA^n$
 - A est nilpotente.

Corrigé

- Soient $\alpha \in \mathbb{C} \quad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\begin{aligned} \phi(\alpha X + Y) &= (\alpha X + Y)B - B(\alpha X + Y) = \alpha XB + YB - B\alpha X - BY \\ &= \alpha(XB - BX) + YB - BY = \alpha\phi(X) + \phi(Y) \end{aligned}$$
 donc ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- (a) Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 1 \quad A^n B - BA^n = nA^n$
 - La propriété est vraie au rang 1 car $A^1 B - BA^1 = AB - BA = A = 1A^1$
 - Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ l'on ait $A^n B - BA^n = nA^n$.
 Alors $A(A^n B - BA^n) = A(nA^n)$ donc $A^{n+1} B - ABA^n = nA^{n+1}$
 Or $AB - BA = A$ donc $AB = A + BA$.
 Par conséquent, $A^{n+1} B - (A + BA)A^n = nA^{n+1}$ donc $A^{n+1} B - A^{n+1} - BA^{n+1} = nA^{n+1}$
 D'où $A^{n+1} B - BA^{n+1} = (n+1)A^{n+1}$
 - La propriété étant initialisée en 1 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$

- (b) Raisonnons par l'absurde, supposons que A n'est pas nilpotente donc
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n \neq O$. Or $\phi(A^n) = A^n B - B A^n = n A^n$ donc A^n est un vecteur propre
associé à la valeur propre n .
Par conséquent, ϕ admet une infinité de valeurs propres $n \in \mathbb{N}^*$. Impossible car
 $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$ est finie.
On en déduit $\exists p \in \mathbb{N} \quad A^p = O$

7.5.3 Endomorphisme nilpotent d'indice 3

Soit un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_3 \\ f(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \end{cases}$$

1. Déterminer $N = \ker(f)$ et en donner une base.
2. Déterminer $I = \text{Im}(f)$ et en donner une base
3. Déterminer l'ensemble $f < I >$
4. Comparer les ensembles $f < I >$ et N pour la relation d'inclusion.
5. En déduire ce qu'est $f \circ f \circ f$.

1. • f est un endomorphisme de matrice M dans la base \mathcal{B} .

$$\text{alors } M = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

- Soit u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

$$u \in \ker(f) \iff f(u) = 0 \iff MX = O \iff \begin{cases} -y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$u \in \ker(f) \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z = 1z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Par conséquent, $N = \ker(f)$ est la droite vectorielle de base $u_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. • D'après le théorème du rang, on a :
 $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ donc $3 = 1 + \dim(\text{Im}(f))$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$
- Or on sait que $\text{Im}(f)$ est engendré par la famille $\mathcal{F} = (f(e_1); f(e_2); f(e_3))$.
 Or on constate que $f(e_1) = f(e_2) + 2f(e_3)$ donc $\text{Im}(f)$ est engendré par la famille $\mathcal{F}' = (f(e_2); f(e_3))$
- La famille \mathcal{F}' est libre car étant en dimension 3 un de ses trois déterminants mineurs d_1, d_2, d_3 associés à ces deux vecteurs est non nul.
 En effet,
- $$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}; \quad d_3 = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$
- Par conséquent, $I = \text{Im}(f)$ est un plan vectoriel de base $(f(e_2); f(e_3))$.
3. • Comme I est le plan vectoriel de base $(f(e_2); f(e_3))$ alors $f \langle I \rangle$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f(f(e_2)); f(f(e_3)))$
- $f(f(e_2)) = f(-e_1 + e_3) = -f(e_1) + f(e_3) = -e_2 - e_3 + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - e_3$
- $f(f(e_3)) = f\left(\frac{1}{2}(e_1 + e_2)\right) = \frac{1}{2}f(e_1) + \frac{1}{2}f(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 + e_3) + \frac{1}{2}(-e_1 + e_3) = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3$
- Comme $f(f(e_2)) = -f(f(e_2)) \neq 0$ alors $f \langle I \rangle$ est la droite vectorielle de base $f(f(e_2)) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - e_3$
4. Les droites vectorielles $f \langle I \rangle$ et N sont égales car N a pour base u_1 et $f \langle I \rangle$ a pour base $-u_1$.
5. • $\forall u \in E \quad f(u) \in I$
 • Donc $f(f(u)) \in f \langle I \rangle = N = \ker(f)$
 • D'où $f(f(f(u))) = 0$ donc $f \circ f \circ f = \theta$ l'application linéaire nulle.
 f est donc un endomorphisme nilpotent d'indice 3.

7.5.4 Epita 17 mp

Sujet

Corrigé

Chapitre 8

Endomorphisme adjoint

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

8.1 Rappels

8.1.1 Transposée d'une matrice

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on appelle **transposée de la matrice** A la matrice notée tA définie par ${}^tA = (a_{ji})$.

On a les propriétés suivantes :

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad {}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$
4. $\det({}^tA) = \det(A)$
5. Si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible ainsi que tA avec en plus $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

8.1.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle ; \rangle$ et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Alors

1. $x = \sum_{j=1}^n \langle x ; e_j \rangle e_j$

2. les coordonnées de tout vecteur x de E dans la base \mathcal{B} sont
$$\begin{pmatrix} \langle x ; e_1 \rangle \\ \langle x ; e_2 \rangle \\ \langle x ; e_3 \rangle \\ \vdots \\ \langle x ; e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ donc

$$\langle x; e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i; e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i; e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \text{ car } \langle e_i; e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

puisque $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

8.1.3 Ecriture du produit scalaire en dimension finie

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle ; \rangle$ et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

On peut identifier E et \mathbb{R}^n donc on peut identifier un vecteur x avec sa matrice X de coordonnées dans la base \mathcal{B} . On a alors

$$\langle x; y \rangle = \langle X, Y \rangle = {}^t X Y$$

- $\langle x; y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i; \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i; e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- ${}^t X Y = {}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

8.1.4 Problème de l'endomorphisme adjoint

On cherche à résoudre le problème suivant :

- Soit E un **espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire** $\langle ., . \rangle$.
- Soit un endomorphisme

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- On cherche à déterminer un endomorphisme inconnu

$$\begin{aligned} f^* : E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^*(y) \end{aligned}$$

tel que

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle x; f^*(y) \rangle = \langle f(x); y \rangle$$

8.1.5 Existence de l'adjoint en dimension finie

Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n .

Soient A et B les matrices des endomorphismes f et g dans une base orthonormée \mathcal{B} .

Soient X et Y les matrices de coordonnées de x et de y dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x); y \rangle = \langle x; g(y) \rangle$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad {}^t(AX)Y = {}^tX(BY)$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad {}^tX {}^tAY = {}^tX BY$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad {}^tX[{}^tA - B]Y = 0$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tX[{}^tA - B] = 0 \text{ car le seul vecteur orthogonal à tout } Y \text{ est le vecteur nul } 0$$

$$\iff [{}^tA - B] = 0 \text{ car le seul vecteur orthogonal à tout } {}^tX \text{ est le vecteur nul } 0$$



En dimension finie, si f est un endomorphisme de matrice A dans une base orthonormée \mathcal{B} alors il existe au moins un endomorphisme g tel que

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x); y \rangle = \langle x; g(y) \rangle$$

C'est l'endomorphisme g de matrice $B = {}^tA$ dans \mathcal{B} .

8.1.6 Unicité de l'adjoint en dimension finie

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ donc } g(y) = g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(e_i) \text{ avec } \lambda_i = \langle g(y); e_i \rangle$$

$$\forall y \in E \quad g(y) = \sum_{i=1}^n \langle g(y); e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle y; f(e_i) \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle f(e_i); y \rangle e_i$$

cette écriture est unique à partir de la connaissance de f donc g est unique



En dimension finie, si f est un endomorphisme de matrice A dans une base orthonormée \mathcal{B} alors il existe un et un seul endomorphisme $g = f^*$ appelé l'adjoint de f tel que

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x); y \rangle = \langle x; f^*(y) \rangle$$

f^* est l'endomorphisme de matrice $B = {}^tA$ dans \mathcal{B}

8.1.7 Propriétés de l'adjoint

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$

1.

$$(f^*)^* = f$$

2.

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

3.

$$\text{Si } f \text{ est bijective alors } (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

4.

$$\text{Spectre}(f) = \text{Spectre}(f^*)$$

5.

$$f \text{ est diagonalisable} \iff f^* \text{ est diagonalisable}$$

1. $(f^*)^* = f$ est vrai car ${}^t({}^t A) = A$
2. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ car ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$
3. Si f est bijective alors $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ car ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$
4. $\text{Spectre}(f) = \text{Spectre}(f^*)$ car $\chi_A = \det(XI - A) = \det({}^t(XI - A)) = \det({}^t(XI) - {}^t A) = \det(XI - {}^t A) = \chi_{{}^t A}$
5. f est diagonalisable $\iff A = P D P^{-1} \iff {}^t A = {}^t(P^{-1}) {}^t D {}^t P = ({}^t P)^{-1} {}^t D {}^t P \iff f^*$ est diagonalisable

8.2 Endomorphismes et Matrices symétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien c'est-à-dire espace préhilbertien réel de dimension finie $n > 0$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans E .

Soit f un endomorphisme de E ayant pour matrice A dans une base orthonormée \mathcal{B} de E .

8.2.1 Définitions équivalentes d'un endomorphisme symétrique

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f = f^*$
2. $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$
3. A est symétrique c'est-à-dire que ${}^t A = A$
4. $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad {}^t X A Y = {}^t Y A X$

On dit alors que f est un endomorphisme symétrique ou auto-adjoint.

On note $\mathcal{S}_n(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ donc X a pour format $[n, 1]$ d'où ${}^t X$ a pour format $[1, n]$.

Soit A de format $[n, n]$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ donc Y a pour format $[n, 1]$.

Alors ${}^t X A Y =$ une matrice de format $[1, 1] =$ un scalaire qui sera égal à son transposé donc ${}^t X A Y = {}^t ({}^t X A Y) = {}^t Y {}^t A {}^t ({}^t X) = {}^t Y A X$

8.2.2 Dimension de $\mathcal{S}_n(E)$

Si E est un espace vectoriel de dimension n alors $\mathcal{S}_n(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

8.2.3 Exemples

La transposition de matrices est un endomorphisme symétrique de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit l'espace vectoriel euclidien $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A B)$$

Soit l'endomorphisme f de E défini par $f(A) = {}^t A$.
Déterminer l'adjoint f^* de f

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, f(B) \rangle = \text{Tr}({}^t A f(B)) = \text{Tr}({}^t A {}^t B) = \text{Tr}({}^t(BA)) = \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB)$$

$$\text{Donc } \langle A, f(B) \rangle = \text{Tr}({}^t({}^t A)B) = \langle {}^t A, B \rangle = \langle f(A), B \rangle$$

Donc $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f^*(A) = {}^t A$ donc $f = f^*$ donc cet endomorphisme est symétrique

8.2.4 Propriétés d'un endomorphisme symétrique

1. Si $f \in \mathcal{S}_n(E)$ et si f est bijective alors son endomorphisme réciproque f^{-1} est lui aussi symétrique.
2. Toute combinaison linéaire d'endomorphismes symétriques est symétrique.
3. Soient f et g des endomorphismes symétriques de E alors

$$g \circ f \text{ est symétrique} \iff g \circ f = f \circ g$$

4. si $f \in \mathcal{S}_n(E)$ alors $Im(f)$ et $ker(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

$$1. \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, f^{-1}(y) \rangle = \langle id(x), f^{-1}(y) \rangle = \langle (f \circ f^{-1})(x), f^{-1}(y) \rangle = \langle f^{-1}(x), f(f^{-1}(y)) \rangle = \langle f^{-1}(x), y \rangle \text{ donc } f^{-1} \text{ est un endomorphisme symétrique.}$$

2. Si f et g sont des endomorphismes symétriques alors $f^* = f$ et $g^* = g$ donc
 $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^* = \alpha f + \beta g$. CQFD.

3. Comme f et g sont symétriques alors $f = f^*$ et $g = g^*$.

(a) \implies :

On suppose que $g \circ f$ est symétrique .

$$\text{Alors } \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle (g \circ f)(x), y \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle.$$

$$\text{Donc } \langle (g \circ f)(x), y \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle$$

$$= \langle g^*(x), f(y) \rangle = \langle (f^* \circ g^*)(x), y \rangle = \langle (f \circ g)(x), y \rangle$$

$$\text{Par conséquent, } \forall y \in E \quad \langle (g \circ f)(x), y \rangle - \langle (f \circ g)(x), y \rangle = 0 \text{ d'où } \forall y \in E \quad \langle (g \circ f)(x) - (f \circ g)(x), y \rangle = 0.$$

$$\text{On en déduit que } \forall x \in E \quad (g \circ f)(x) - (f \circ g)(x) = 0 \text{ donc } g \circ f = f \circ g.$$

(b) \impliedby :

Réciproquement, si l'on suppose que $g \circ f = f \circ g$

$$\text{alors } \langle x, (g \circ f)(y) \rangle = \langle (g \circ f)^*(x), y \rangle = \langle (f^* \circ g^*)(x), y \rangle$$

$$= \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle (g \circ f)(x), y \rangle \text{ donc } (g \circ f)^* = (g \circ f) \text{ donc } g \circ f \text{ est symétrique}$$

4.

8.2.5 Propriétés d'une matrice symétrique réelle

1. Si A est symétrique réelle alors
 - (a) Toutes ses valeurs propres sont réelles.
 - (b) Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.
 - (c) Si la matrice P est orthogonale alors $A' = P^{-1} A P$ est symétrique
 - (d) **Théorème spectral** ♡♡♡ :

A est orthogonalement diagonalisable

c'est-à-dire

$\exists P$ orthogonale (i.e P inversible et ${}^tP = P^{-1}$) $\exists D$ diagonale

$$A = P D {}^tP$$

2. Si A est symétrique réelle et inversible alors sa matrice inverse A^{-1} est elle aussi symétrique réelle.
3. Soient A et B des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$AB \text{ est symétrique réelle } \iff AB = BA$$

1. (a) Toutes ses valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles :

En effet, soit λ une valeur propre de f alors $\exists V \neq O \quad AV = \lambda V$

par conséquent, $A\bar{V} = \bar{\lambda} \bar{V}$.

Or A est symétrique réelle donc ${}^tX A Y = {}^tY A X$

d'où ${}^t\bar{V} A V = {}^tV A \bar{V}$ d'où ${}^t\bar{V} (\lambda V) = {}^tV (\bar{\lambda} \bar{V})$.

On a donc $\lambda ({}^t\bar{V} V) = \bar{\lambda} ({}^tV \bar{V})$.

$$\text{Comme } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } \bar{V} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} \text{ alors } {}^t\bar{V} V = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i v_i \text{ et } {}^tV \bar{V} = \sum_{i=1}^n v_i \bar{v}_i$$

$$\text{D'où } \lambda \left(\sum_{i=1}^n \bar{v}_i v_i \right) = \bar{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n \bar{v}_i v_i \right).$$

Or $\sum_{i=1}^n \bar{v}_i v_i \neq 0$ donc $\lambda = \bar{\lambda}$ d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. CQFD.

- (b) Soient des valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Soit \vec{v}_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 .

Soit \vec{v}_2 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_2 .

Comme l'endomorphisme f associé à la matrice A est symétrique alors $\vec{v}_1 \cdot f(\vec{v}_2) =$

$$f(\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 \text{ donc } \vec{v}_1 \cdot (\lambda_2 \vec{v}_2) = (\lambda_1 \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$$

d'où $(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ d'où $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Ces deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont donc orthogonaux.

- (c) Si la matrice P est orthogonale alors P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

$$\text{Donc } {}^tA' = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP {}^tA {}^t(P^{-1}) = P^{-1}A {}^t({}^tP) = P^{-1}AP = A'.$$

Par conséquent, A' est symétrique. CQFD.

- (d) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit f un endomorphisme symétrique.

Soit A la matrice symétrique associée à f dans cette base.

Soit λ_1 une valeur propre de f . Choisissons v_1 un vecteur unitaire propre associé à λ_1 .

A l'aide du processus d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT on peut construire une base orthonormée $\mathcal{B}' = (v_1, \mathcal{B}'')$.

Dans cette nouvelle base, la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(\mathcal{B}'') \\ \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \mathcal{B}'' \end{matrix}$

Or $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Or tout endomorphisme transformant une base orthonormée en une autre base orthonormée est une isométrie vectorielle ou encore un endomorphisme orthogonal donc la matrice P est orthogonale donc inversible avec $P^{-1} = {}^tP$.

Or A est symétrique donc $A' = P^{-1}AP$ est symétrique.

Par conséquent, la matrice B est une matrice symétrique d'ordre $n - 1$.

On réitère le procédé en transformant A en B .

On obtient ainsi une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dans laquelle on a :

$$D = \text{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\exists P \text{ orthogonale } \exists D \text{ diagonale } A = {}^tP D P$$

2. Démonstration évidente en traduisant matriciellement le 1 du théorème 8.2.4
3. Démonstration évidente en traduisant matriciellement le 3 du théorème 8.2.4



Remarque

Attention : ce théorème spectral est faux pour une matrice symétrique complexe d'ordre $n > 1$

- Par exemple $M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est nilpotente de d'indice 2 donc M n'a qu'une seule valeur propre $\lambda = 0$. Son polynôme caractéristique est $\chi_M = X^2$.

Si M était diagonalisable alors M serait semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $M = O$ la matrice nulle ce qui est impossible.

-
-

Propriétés sur les vecteurs propres

Si une matrice symétrique réelle a des valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors les sous-espaces propres associés sont orthogonaux.

On sait que B est symétrique donc ${}^t B = B$.

Soient $x_1 \in E_{\lambda_1}$ non nul et $x_2 \in E_{\lambda_2}$ non nul alors

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle Bx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, {}^t Bx_2 \rangle = \langle x_1, Bx_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Par conséquent $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0$. Mais $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ donc $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. CQFD.

8.2.6 Propriété de la matrice $M = {}^t A A$

1. $f \circ f^*$ est symétrique et défini positif.
2. $M = {}^t A A$ est symétrique définie positive.

8.2.7 Exercices

Matrice symétrique définie positive

Soit un entier $n \geq 2$. Soit une matrice symétrique non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si A est définie positive alors il existe une matrice B symétrique définie positive telle que $B^2 = A$
2. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) A est soit définie positive soit définie négative
 - (b) Pour toute matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AS est diagonalisable.

Corrigé

Matrice définie positive

Soit un entier $n \geq 1$. Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = \min(i, j)$.
Démontrer que A est définie positive.

Corrigé

Matrice définie positive

Soit un entier $n \geq 1$.

Soit une matrice symétrique $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

1. Démontrer que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^k a_{jj} \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.
2. On suppose de plus que A est positive.

Démontrer que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \prod_{j=1}^k a_{jj} \leq \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \lambda_j \right)^k$.

Corrigé

8.2.8 Bibliographie

Exemple : e3a 2004 ex 2

Exemple : e3a 2018 psi

Exemple : Ecricome 03 ecs

8.3 Endomorphismes et Matrices antisymétriques

8.3.1 Définition

Soit un espace vectoriel euclidien e où le produit scalaire est noté $\langle x; y \rangle$ et la norme $\|x\|$.
Le vecteur nul de E est noté 0_E .
On dit qu'un endomorphisme f de E est antisymétrique lorsque

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x); y \rangle = - \langle x; f(y) \rangle$$

8.3.2

8.3.3

8.3.4

8.3.5 Bibliographie

1. Problème Ecricome 2023 ECG MAPPRO - Sujet 0 - ex 1
2. Exercice 3 - edhec 21 ecs
- 3.

8.4 Endomorphismes normaux et Matrices normales

8.4.1 Définition

Soit E un espace vectoriel préhilbertien.

1. On dit qu'un endomorphisme f de E est normal lorsque $f^* \circ f = f \circ f^*$.
2. On dit que M est une matrice normale lorsque $M^* M = M M^*$:
 - Dans un espace vectoriel euclidien cela revient à ${}^t M M = M {}^t M$
 - Dans un espace vectoriel hermitien cela revient à ${}^t \overline{M} M = M {}^t \overline{M}$
- 3.

8.4.2 Exemples

Tout endomorphisme symétrique est normal.

Comme f est symétrique alors f admet pour adjoint lui-même donc $f^* = f$.
Or $f \circ f = f \circ f$ donc $f \circ f^* = f^* \circ f$. Par conséquent, f est un endomorphisme normal.

8.4.3 Bibliographie

- 1.
- 2.
- 3.

Chapitre 9

Opérateur différence finie Δ

9.1 Définition



Soit le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit E un \mathbb{K} -ev.
Soit $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ le \mathbb{K} - espace vectoriel des polynômes de variable X à coefficients dans \mathbb{K} .
Soit $d \in \mathbb{N}$. On appelle $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ le \mathbb{K} - espace vectoriel des polynômes de variable X à coefficients dans \mathbb{K} et de degré inférieur ou égal à d
On appelle **opérateur différence finie** l'application :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\longmapsto \Delta(P) = P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

9.2 Propriétés

1. Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$
2. $d^\circ(\Delta(P)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } P = \text{constant} \\ d^\circ(P) - 1 & \text{sinon .} \end{cases}$
3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit Δ_d l'endomorphisme induit par Δ sur $(\mathbb{K}_d[X])$.
 - $\text{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}$
 - $\text{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$
4.
 - $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}$ donc Δ n'est pas injective.
 - $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$ donc Δ est surjective.

1. Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ car Δ est la différence de deux endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ à savoir $\Delta = \phi - Id_{\mathbb{K}[X]}$ où

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\longmapsto \phi(P) = P(X+1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Id_{\mathbb{K}[X]} : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\longmapsto Id_{\mathbb{K}[X]}(P) = P(X) \end{aligned}$$

2. • Si P est constant alors $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) = C - C = 0$ donc $d^\circ(\Delta(P)) = -\infty$
 • Si P n'est pas constant donc $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où $d^\circ(P) = d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.

$$\text{On a alors } \Delta(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^d a_k X^k = \sum_{k=0}^d a_k [(X+1)^k - X^k]$$

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k \left[\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \right].$$

$$\Delta(P) \text{ a donc pour terme dominant } a_d \binom{d}{d-1} X^{d-1} = a_d \binom{d}{1} X^{d-1} = a_d d X^{d-1}$$

Par conséquent $d^\circ(\Delta(P)) = d - 1$

3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. D'après la propriété précédente, on a $\Delta(\mathbb{K}_d[X]) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$ donc Δ induit un endomorphisme Δ_d sur $(\mathbb{K}_d[X])$.

- $P \in \text{Ker}(\Delta_d) \iff P(X+1) - P(X) = 0 \iff P(X+1) = P(X)$
 - ◊ Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = P(0)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) - P(0) = 0$ donc le polynôme $P(X) - P(0)$ est nul car il a une infinité de racines donc $P(X) = P(0)$ donc P est constant.
 - ◊ Réciproquement, si P est constant alors $P(X+1) = P(X)$ donc $P(X+1) - P(X) = 0$.
 - ◊ Par conséquent, $\text{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K} =$ l'ensemble des polynômes constants.
- D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{K}_d[X]) = \dim(\text{Ker}(\Delta_d)) + \dim(\text{Im}(\Delta_d))$ donc $d + 1 = 1 + \dim(\text{Im}(\Delta_d))$
 Par conséquent, $\dim(\text{Im}(\Delta_d)) = d$. Or $\text{Im}(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$ qui est lui-même un espace vectoriel de dimension d donc $\text{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$

4. • $P \in \text{Ker}(\Delta) \iff P(X+1) - P(X) = 0 \iff P(X+1) = P(X)$
 ◊ Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = P(0)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) - P(0) = 0$ donc le polynôme $P(X) - P(0)$ est nul car il a une infinité de racines donc $P(X) = P(0)$ donc P est constant.
 ◊ Réciproquement, si P est constant alors $P(X+1) = P(X)$ donc $P(X+1) - P(X) = 0$.
 ◊ Par conséquent, $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K} =$ l'ensemble des polynômes constants.
 • Comme la dimension de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas finie, on ne peut pas utiliser le théorème du rang.

$$\text{Im}(\Delta) = \Delta(\mathbb{K}[X]) = \Delta \left(\bigcup_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_d[X] \right) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \Delta(\mathbb{K}_d[X]) = \Delta(\mathbb{K}_0[X]) \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \Delta(\mathbb{K}_d[X])$$

$$\text{donc } \text{Im}(\Delta) = \Delta(\mathbb{K}[X]) = \{0\} \cup_{d \in \mathbb{N}^*} \mathbb{K}_{d-1}[X] = \mathbb{K}[X]$$

9.3 Exercices

9.3.1 Centrale 2024 -MP/MPI- ep2

9.3.2 EMLyon Ecs 2015

Chapitre 10

Endomorphismes simples

10.1 Définition

$f \in \text{End}(E)$ est dit **semi-simple** si et seulement si tout sev F qui est f -stable admet un supplémentaire qui est lui aussi f -stable.

– Thm : – Ex :

10.2 Exemples

Les rotations de \mathbb{R}^2 sont semi-simples sur \mathbb{R}

10.3 Propriétés

10.3.1 Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes logiquement :

1. f est semi-simple.
2. Son polynôme minimal μ_f est sans facteurs carrés.
3. Il existe une extension de corps L/K telle que μ_f est scindé à racines simples sur L .
4. Il existe une extension de corps L/K telle que $\text{Mat}(f, B)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(L)$.

10.3.2 Corollaire

Les endomorphismes semi-simples sont donc une généralisation des endomorphismes diagonalisables.

Chapitre 11

Quelques problèmes

11.1 Applications semi-linéaires

11.1.1 Sujet

Dans tout ce problème, l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$); E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

Le but de ce problème est d'étudier les **applications semi-linéaires** de l'espace vectoriel complexe E dans lui-même.

- Une application u de E dans E est dite semi-linéaire si et seulement si elle possède la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad u(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} u(x) + \bar{\mu} u(y)$$

où le nombre complexe $\bar{\lambda}$ (resp. $\bar{\mu}$) est le nombre complexe conjugué de λ (resp. μ)

- On dit qu'un nombre μ est une **valeur co-propre de l'application semi-linéaire** u si et seulement si

$$\exists x \neq 0_E \quad u(x) = \mu x$$

On dit que le vecteur x est un **vecteur co-propre associée à la valeur co-propre** μ

Partie 1

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et les vecteurs co-propres.

Soit u une application semi-linéaire de E dans E .

1. Démontrer qu'étant donné un vecteur $x \neq 0_E$, appartenant à l'espace E , il existe au plus un nombre complexe μ tel que $u(x) = \mu x$
2. Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u , pour tout réel θ , le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u .

On exprimera un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ .

3. Etant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$:

$$E_\mu = \{x \in E \text{ tels que } u(x) = \mu x\}$$

Est-ce que l'ensemble E_μ est un \mathbb{C} -espace vectoriel ? un \mathbb{R} -espace vectoriel ?

4. Etant données deux applications semi-linéaires u et v , montrer que $u \circ v$ est une application linéaire.
5. Etude d'un exemple :
On considère l'application suivante

$$u : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) \longmapsto u((x, y)) = (i\bar{x} + \bar{y}, i\bar{y})$$

- (a) Montrer que u est semi-linéaire.
- (b) Montrer que 1 est une valeur propre de u et déterminer un vecteur co-propre associé à 1.

Partie 2

Soit u une application semi-linéaire sur E .

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1, n]}$ une base de E .

Soit $x \in E$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées de x dans \mathcal{B} .

On pose :

$$\phi(x) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_i} e_i\right)$$

1. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Soit ψ l'application linéaire définie par

$$\forall i \in [1; n] \quad \psi(e_i) = \sum_{j=1}^n \overline{\mu_{i,j}} e_j$$

où $\mu_{i,1}, \mu_{i,2}, \dots, \mu_{i,n}$ sont les coordonnées de $u(e_i)$ dans \mathcal{B} .

Montrer que $\psi \circ \phi = u \circ u$

3. Montrer que si μ est une valeur co-propre de u alors

$$\ker(\psi \circ \phi - |\mu|^2 Id_E) \neq \{0_E\}$$

11.1.2 Corrigé

Partie 1

1. Soit $x \neq 0_E$, appartenant à l'espace E , supposons qu'il existe μ et λ tels que $u(x) = \mu x$ et $u(x) = \lambda x$ donc $\lambda x = \mu x$ d'où $(\lambda - \mu)x = 0_E$. Or $x \neq 0_E$ donc $\lambda - \mu = 0$ donc $\lambda = \mu$.
Par conséquent, étant donné un vecteur $x \neq 0_E$, appartenant à l'espace E , il existe au plus un nombre complexe μ tel que $u(x) = \mu x$
2. Supposons que le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u donc $\exists x \neq 0_E \quad u(x) = \mu x$.
alors $u\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} x\right) = e^{-i\frac{\theta}{2}} u(x)$ car u semi-linéaire.
Donc $u\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} x\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}} \mu x = \mu e^{i\theta} e^{-i\frac{\theta}{2}} x$.
Par conséquent, pour tout réel θ , le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u .

Comme $e^{-i\frac{\theta}{2}}x \neq 0_E$ car $x \neq 0_E$ et $e^{-i\frac{\theta}{2}} \neq 0_E$ puisque son module est 1 alors un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ est $e^{-i\frac{\theta}{2}}x$

3. Etant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$:

$$E_\mu = \{x \in E \text{ tels que } u(x) = \mu x\}$$

Est-ce que l'ensemble E_μ est un \mathbb{C} -espace vectoriel ? un \mathbb{R} -espace vectoriel ?

4. Etant données deux applications semi-linéaires u et v , montrer que $u \circ v$ est une application linéaire.
5. Etude d'un exemple :
On considère l'application suivante

$$\begin{aligned} u : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\longmapsto u((x, y)) = (i\bar{x} + \bar{y}, i\bar{y}) \end{aligned}$$

- (a) Montrer que u est semi-linéaire.
- (b) Montrer que 1 est une valeur propre de u et déterminer un vecteur co-propre associé à 1.

Partie 2

Soit u une application semi-linéaire sur E .

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1, n]}$ une base de E .

Soit $x \in E$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées de x dans \mathcal{B} .

On pose :

$$\phi(x) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right)$$

1. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Soit ψ l'application linéaire définie par

$$\forall i \in [1; n] \quad \psi(e_i) = \sum_{j=1}^n \overline{\mu_{i,j}} e_j$$

où $(\mu_{i,1}, \mu_{i,2}, \dots, \mu_{i,n})$ sont les coordonnées de $u(e_i)$ dans \mathcal{B} .

Montrer que $\psi \circ \phi = u \circ u$

3. Montrer que si μ est une valeur co-propre de u alors

$$\ker(\psi \circ \phi - |\mu|^2 Id_E) \neq \{0_E\}$$