SUITES ARITHMETIQUES - SUITES GEOMETRIQUES

Rappels : Définition de la convergence d'une suite

$(u_n)_{n \in I}$ est convergente sur I lorsque $\exists L \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

$(u_n)_{n \in I}$ est divergente sur I lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ n'existe pas ou est infinie

1°) Suites arithmétiques

a) Définition

Une suite (u_n) définie sur I est arithmétique de raison r s'il existe un réel r tel que :

$\forall n \in I$ l'on a : $u_{n+1} = u_n + r$

b) Démarche :

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, l'on calcule $u_{n+1} - u_n$ et l'on prouve que cette différence est égale à un nombre r indépendant de n.

c) Propriétés

P1 - Comment exprimer un terme quelconque en fonction du premier terme et de la raison ?

1er terme	a	u_0	u_1
2ème terme	$a + r$	u_1	u_2
3ème terme	$a + 2r$	u_2	u_3
...	...		
nième terme	$a + (n-1)r$	u_{n-1}	u_n
(n+1)ième terme	$a + nr$	u_n	u_{n+1}

- Donc si le premier terme est u_0 alors $u_n = u_0 + nr$
- Donc si le premier terme est u_1 alors $u_n = u_1 + (n - 1)r$
- Donc si $n \in I$ et $p \in I$ avec $n \geq p$ alors $u_n = u_p + (n - p)r$

P2 - a, b et c sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique $\Leftrightarrow b = \dfrac{a + c}{2}$

P3 - Si la raison est nulle alors la suite arithmétique est constante donc convergente.

dém : r = 0 donc tous les termes sont égaux au premier terme et donc converge vers cette constante

P4 - Si la raison est non nulle alors la suite arithmétique est divergente.

dém : la limite quand n tend vers plus l'infini du nème terme $(a + (n-1)r)$ est l'infini (le signe dépendant du signe de r)

P5 - la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\text{Nombre de termes} \; \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

2°) Suites géométriques

a) Définition

Une suite (u_n) définie sur I est géométrique de raison q non nulle si:

$\exists\, q \in \mathbb{R}^* \ \forall\, n \in I$ l'on a : $u_{n+1} = q * u_n$

b) Démarche :

Méthode 1 :

Pour démontrer qu'une suite est géométrique,

- l'on prouve par exemple par récurrence que $\forall\, n \in I$, $u_n \neq 0$
- l'on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et l'on prouve que cette différence est égale à un nombre q indépendant de n.

Méthode 2

On exprime u_{n+1} jusqu'à trouver q * un
On peut savoir ce qu'est q si l'on fait le b) de la méthode 1 au brouillon

c) Propriétés

P1 - Comment exprimer un terme quelconque en fonction du premier terme et de la raison ?

1er terme	a	u_0	u_1
2ème terme	a q	u_1	u_2
3ème terme	$a\,q^2$	u_2	u_3
...	...		
nième terme	$a\,q^{n-1}$	u_{n-1}	u_n
(n+1)ième terme	$a\,q^n$	u_n	u_{n+1}

- Donc si le premier terme est u_0 alors $u_n = q^n\, u_0$
- Donc si le premier terme est u_1 alors $u_n = q^{n-1}\, u_1$
- Donc si $n \in I$ et $p \in I$ avec $n \geq p$ alors $u_n = q^{n-p}\, u_p$

P2 - a, b et c sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique $\Leftrightarrow b^2 = a\,c$

P3 - Si la raison q est supérieure strictement à 1 alors
$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ et donc la suite géométrique est divergente

dém : si $q > 1$ alors $q^n = (1 + t)^n$ où $t > 0$. Or d'après l'inégalité de Bernoulli $(1 + t)^n \geq 1 + nt$
donc la $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ où $t > 0$ car $\lim_{n \to +\infty}$ nt est plus l'infini.

P4 - Si la raison q est dans]-1;1[alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ et la suite géométrique est convergente :

dém : si q est dans]-1;1[alors $0 < q' = |q| < 1$ donc $\frac{1}{q'} > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{q'})^n = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} q'^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} a\, q^n = 0$.

P5 - Si la raison est 1 alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$ et la suite géométrique est constante donc convergente.

dém : si q = 1 donc tous les termes sont égaux au premier terme et donc la suite converge vers cette constante

P6 - Si la raison est inférieure ou égale à -1 alors $\lim_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas et la suite géométrique est divergente

dém : si q <= -1 donc tous les termes sont alternativement positifs et négatifs donc $\lim_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas donc la suite géométrique est divergente.

P7 - la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est égale à :

$$\text{1er terme} \; \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$