SUITES DE NOMBRES REELS

1°) Définition

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui a l'une des deux formes suivantes :

Forme 1 : $I = [\, a\, ;\, b\,] \cap \mathbb{N} = \{ a , a+1 , a+2 , \dots , b-1 , b \}$ où a et b appartiennent à $\mathbb{N}$

Forme 2 : $I = [\, a\, ;\, +\infty\, [\cap \mathbb{N} = \{ a , a+1 , a+2 , \dots\dots\dots\dots\}$ où a appartient à $\mathbb{N}$

On appelle suite de nombre réels définie sur I toute application u : I -----> $\mathbb{R}$

n -----> u(n)

u(n) s'appelle le terme général de la suite u et se note u_n

la suite u se notera $(u_n)_{n \in I}$

Lorsque I sera de la forme 1 , la suite u est dite suite finie de nombres réels

Lorsque I sera de la forme 2 , la suite u est dite suite infinie de nombres réels

2°) Suites « logiques » de nombres

Dans chacun des cas suivants , il est proposé quelques-uns des premiers termes d'une suite de nombres. Déterminer , en analysant les termes donnés une règle éventuelle de construction de la suite en exprimant un terme u_n en fonction du précédent u_{n-1}.

Compléter alors chacun des … par le nombre obtenu selon la règle établie.

a) 1, 2, 4, ...

b) 1, 2, 4,...

en comptant le nombre maximum de régions du plan découpées par des droites.

c) 1, 2, 4, 8, …

d) 1, 2, 4, 8, …

en comptant le nombre maximum de régions du plan découpées par des cercles.

e) 1, 2, 4, 8, 16, …

f) 1, 2, 4, 8, 16,…

en comptant le nombre maximum de régions d'un disque découpées par les segments joignant deux à deux des points du cercle.

1, 6, 11, 16, …

g) 125, - 25, 5 , - 1, …

h) 1, 2, 4, 7 , …

i) 1, 5 , 4 , 8 , 7 , …, ….

j) 1, 5, 4, 8, 7 , … , ….

k) 11, 25, 53, …

l) 3, - 9, 27, - 81, …

3°) Différents modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie :

a) **soit par son terme général**

ex 1 $(u_n)_{n \in N^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$

ex 2 $(u_n)_{n \in N}$ définie par $u_n = 1^n$. Cette suite est dite constante ou stationnaire.

ex 3 $(u_n)_{n \in N}$ définie par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est dite alternée.

ex 4 $(u_n)_{n \in N}$ définie par $u_{2p} = 3^p$ et $u_{2p+1} = \cos(p)$

ex 5 $(u_n)_{n \in N}$ définie par $u_n = f(n)$ où $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Dessiner Cf . placer u_0 , u_1 , u_2 sur l'axe des abscisses

b) **soit par une relation de récurrence**

ex 6 La fameuse suite de Fibonacci alias Léonard de Pise

$(u_n)_{n \in N^*}$ définie par $u_1 = 1$; $u_2 = 1$; pour tout n supérieur à 3, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

ex 7 $(u_n)_{n \in N}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

Dessiner Cf . placer u_0 , u_1 , u_2 sur l'axe

c) **soit par une caractéristique**

ex 8 : les suites arithmétiques de 1^er^ terme a et de raison r

$a, a + r , a + 2 r , a + 3 r$, ……………………………………

ex 9 : les suites géométriques de 1^er^ terme a et de raison q non nulle.

a , aq , aq^2 , aq^3, …………………………………………………

4°) Propriétés d'une suite

- $(u_n)_{n \in I}$ est majorée sur I lorsque $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall n \in I \quad u_n \le M$
- $(u_n)_{n \in I}$ est minorée sur I lorsque $\exists m \in \mathbb{R} \ \forall n \in I \quad m \le u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est bornée sur I lorsque $\exists M \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{R} \ \forall n \in I \quad m \le u_n \le M$
- $(u_n)_{n \in I}$ est croissante sur I lorsque $\forall n \in I \ u_n \le u_{n+1}$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \ge 0$
- $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante sur I lorsque $\forall n \in I \ u_n \ge u_{n+1}$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \le 0$

3 méthodes pour étudier les variations de $(u_n)_{n \in I}$:

M1 – étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

M2 – si on a prouvé par raisonnement (par exemple par récurrence) que

$\forall n \in I \ u_n > 0$ (resp $\forall n \in I \ u_n < 0$) il suffit alors de comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

M3 – si $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique d'une variable réelle, on utilise les variations de f sur I :

Ex : si f est croissante sur I alors comme $n \le n+1$ on a $f(n) \le f(n+1)$ donc $u_n \le u_{n+1}$

Ex : si f est décroissante sur I alors comme $n \le n+1$ on a $f(n) \ge f(n+1)$ donc $u_n \ge u_{n+1}$

- $(u_n)_{n \in I}$ est constante ou stationnaire sur I lorsque $\forall n \in I \ u_n = u_{n+1}$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n = 0$
- $(u_n)_{n \in I}$ est positive (resp strictement positive) sur I lorsque $\forall n \in I \ u_n \ge 0$ (resp $u_n > 0$)
- $(u_n)_{n \in I}$ est négative (resp strictement négative) sur I lorsque $\forall n \in I \ u_n \le 0$(resp $u_n < 0$)