# VARIABLES ALEATOIRES REELLES DISCRETES

## 1°) Rappels

### a) Image d'un sous ensemble

**Si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F,**
**si A est une partie de E alors f<A> est l'ensemble formé des images des éléments de A et s'appelle l'ensemble image de A par f.**

### b) Propriétés :

**A et B étant des parties de E :**

**Si $A \subset B$ alors $f<A> \subset f<B>$**

**$f< A \cup B > = f < A > \cup f <B>$**

**$f( A \cap B > \subset f<A> \cap f<B>$. La réciproque est vraie lorsque f est injective.**

### c) Image réciproque d'un sous ensemble

Si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F,
si A' est une partie de F alors $f^{-1}<A'>$ est l'ensemble formé des antécédents par f des éléments de A' et s'appelle l'ensemble image réciproque de A' par f.

### d) Propriétés :

**A' et B' étant des parties de F :**

**Si $A' \subset B'$ alors $f^{-1}<A> \subset f^{-1}<B>$**

**$f^{-1}< A' \cup B' > = f^{-1} < A'> \cup f^{-1} <B'>$**

**$f^{-1} <A' \cap B' > = f^{-1}<A'> \cap f^{-1}<B'>$**

## 2°) Définition d'une variable aléatoire réelle discrète

Soit un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$.

**On appelle variable aléatoire réelle ou aléa numérique toute application X de $\Omega$ dans R**
**L'ensemble des images des éléments de $\Omega$ par la variable aléatoire réelle X s'appelle l'univers-image et se note $X< \Omega >$.**

On peut alors construire l'espace probabilisable image $(X<\Omega>,\mathcal{P}(X<\Omega>)$

Lorsque $X< \Omega >$ est **fini ou infini dénombrable**, la variable aléatoire X est dite discrète.

- Dans le cas fini où $\Omega$ est **fini** et Card( $\Omega$ ) = n,
  on notera $X< \Omega > = \{x_1,x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n$
- Dans le cas où $\Omega$ est **infini dénombrable**,
  on notera $X< \Omega > = \{x_1,x_2, \ldots\ldots, x_n , \ldots\ldots\ldots\ldots\}$ où $x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n$

## 3°) Exemples

- Ex 1 : Lorsque l'on jette 2 dés portant des numéros de 1 à 6, on peut s'intéresser à X = la somme des numéros situés sur les faces de dessus.
  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ et $X< \Omega > = \{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\} = [| 2 ,12 |]$ ( en informatique on écrit 2 .. 12)

- Ex 2 : Lorsqu'on jette un dé jusqu'à l'obtention de 6, on peut s'intéresser à X = le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de 6 alors $\Omega$ = { listes de nombres compris entre 1 et 6 }. Card( $\Omega$ ) n'est pas fini sinon $\Omega$ aurait un nombre fini de listes qui elles auraient nécessairement une longueur finie et alors on obtiendrait en n jets des listes du type(1, 1, 1, ….., 1) avec n fois 1 . Il n'y aurait donc pas de 6 ce qui est impossible.

  $\Omega$ est donc dénombrable et $X< \Omega > = \mathbb{N}^*$

## 4°) Loi de probabilité de la variable aléatoire X

**L'application suivante $P_X$ : $\mathcal{P}(X<\Omega>)$ ------------ > [0;1]**

**A' ------------ > $P_X$ (A') = $P(X^{-1}<A'>)$**

**est une loi de probabilité appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X.**

démonstration :

1°) $P_X(A') \geq 0$ car $P_X(A') = P(X^{-1}<A'>)$ et $P(X^{-1}<A'>) \geq 0$

2°) $P_X(X<\Omega>) = P(X^{-1}<X<\Omega>>) = P(\Omega) = 1$

3°) Soient A' et B' des parties de $X<\Omega>$ telles que $A' \cap B' = \varnothing$ alors

$P_X(A' \cup B') = P(X^{-1}<A' \cup B'>) = P(X^{-1}<A'> \cup X^{-1}<B'>)$

$= P(X^{-1}<A'>) + P(X^{-1}<B'>) = P_X(A') + P_X(B')$ car $X^{-1}<A'> \cap X^{-1}<B'> = X^{-1}<A' \cap B'> = X^{-1}<\varnothing> = \varnothing$

### Remarques

### R1 - Notations

Soient a et b des nombres réels.

- On notera [ X = a ] l'événement $\{ \omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a \}$
- On notera [ $X \leq a$ ] l'événement $\{ \omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq a \}$
- On notera [ $a \leq X < b$ ] l'événement $\{ \omega \in \Omega \ / \ a \leq X(\omega) < b \}$

### R2 - cas où $X<\Omega>$ est fini et $X<\Omega> = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

La loi de probabilité de X est entièrement déterminée par la connaissance des $p_i = P([X = x_i])$ que l'on peut présenter dans un tableau :

| Valeurs de X $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ..... | | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ ou $P([X = x_i])$ | | | | | 1 |
| $p_i x_i$ | | | | | E(X) |
| $x_i^2$ | | | | | |
| $p_i x_i^2$ | | | | | $E(X^2)$ |

On pourra alors en déduire $\text{Variance}(X) = E( (X - E(X))^2 ) = E(X^2) - (E(X))^2$

### R3 - cas où $X<\Omega> = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ est dénombrable

On détermine carrément $P([X = x_n])$

Dans le cas de l'ex 2 où X = le nombre de jets d'un dé nécessaire pour obtenir un 6.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P([X = n]) = (\frac{5}{6})^{n-1} (\frac{1}{6})$

## 5°) Fonction de répartition

### a) définition

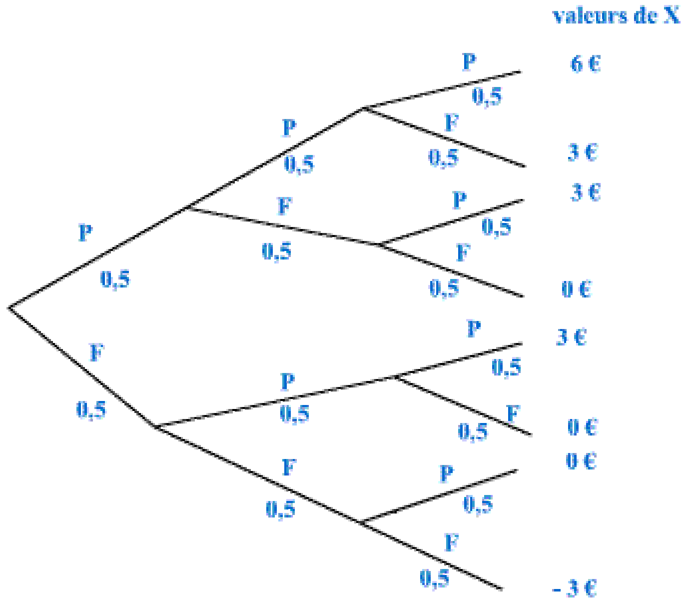
**On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X**

**l'application F : R ---------- > [ 0 ; 1 ]**

**x ---------- > F(x) = P ( [ X ≤ x ]**

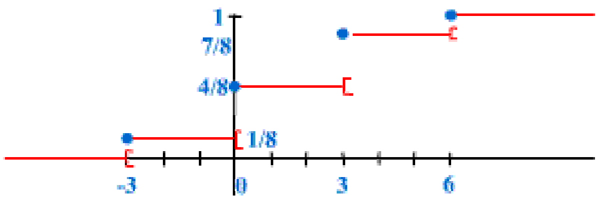
### b) exemples

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat "Pile" et on perd 1 € pour chaque résultat "Face". Soit X la variable aléatoire représentant le gain obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X puis représenter graphiquement sa fonction de répartition .




| Valeurs de X $x_i$ | -3 | 0 | 3 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ ou $P([X = x_i])$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -3 \\ \frac{1}{8} \text{ si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{4}{8} \text{ si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{7}{8} \text{ si } 3 \leq x < 6 \\ 1 \text{ si } 6 \leq x \end{cases}$$




### c) propriétés

**P1 - F est une fonction en escalier croissante**

**P2 - $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$**

**P3 - F est continue en tout $x \neq x_i$**

**P4 - $\forall x \in \mathbb{R}$ $P( ( X > x ]) = 1 - P( [X \leq x ]) = 1 - F(x)$**

**P5 - $\forall$ a $\in \mathbb{R}$ $\forall$ b $\in \mathbb{R}$ $P( [ a < X \leq b ] ) = F(b) - F(a)$**

## 6°) Espérance mathématique ou moment d'ordre 1

*" La crainte gouverne le monde et l'espérance le console" Gaston de LEVIS*

### a) Définitions

Formule générale : On appelle espérance mathématique ou moyenne de la vard X ou moment d'ordre 1 le nombre suivant :

$E(X) = \sum\limits_{i \in I} x_i \, P(\,[\,X = x_i\,]\,)$ = le barycentre de chaque valeur pondérée par sa probabilité.

On note aussi ce nombre $\overline{X}$

Avec 2 déclinaisons :

- Dans le cas fini où $I$ est **fini** et $Card(\,I\,) = n$,

  on notera $X\langle\,\Omega\,\rangle = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_n$

  $$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(\,[\,X = x_i\,]\,)}$$

- Dans le cas où $I$ est **infini dénombrable**,

  on notera $X\langle\,\Omega\,\rangle = \{x_i \,/\, i \in I\}$

  **E(X) = la somme de la série $\sum\limits_{i \in I} x_i \, P(\,[\,X = x_i\,]\,)$ à condition que cette série soit absolument convergente**

Lorsque E(X) = 0 on dit alors que la variable aléatoire X est centrée

### b) Propriétés

**P1 - E( variable aléatoire constante C) = C**

**Définition du produit d'un réel par une variable aléatoire :**

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles alors

pour tout réel $\lambda$,
$$\lambda X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow (\lambda X)(\omega) = \lambda X(\omega)$$

**P2 - Pour tout réel $\lambda$, pour toute variable aléatoire réelle X ,**

**$\lambda$ X est une variable aléatoire réelle et E($\lambda$ X) = $\lambda$ E(X)**

**Définition de la somme de deux variables aléatoires :**

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles alors
$$X + Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

**P3 - Pour toutes variables aléatoires réelles X et Y**

**X + Y est une variable aléatoire réelle et E(X + Y) = E(X) + E(Y)**

**P4 - Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, Pour toutes variables aléatoires réelles X et Y ,la combinaison linéaire $\alpha$ X + $\beta$ Y est une variable aléatoire réelle et E($\alpha$ X + $\beta$ Y) = $\alpha$ E(X) + $\beta$ E(Y)**

**P5 - pour toute variable aléatoire réelle X , soit g une application de R dans R**

**g o X est une variable aléatoire réelle et E( g(X)) = $\sum\limits_{i \in I} g(x_i) \, P(\,[\,X = x_i\,]\,)$ à condition que Y = g(X) a une espérance.**

On démontrera plus tard que l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même univers $\Omega$ muni de l'opération d'addition de vard et de l'opération de multiplication d'une vard par un réel est un espace vectoriel réel $\mathcal{V}$ et

que l'application espérance $E : \mathcal{V} \longrightarrow R$

$X \longrightarrow E(X)$ est une application linéaire sur $\mathcal{V}$

car elle vérifie P2 et P3 (ou encore P4 qui est équivalente à P2 et P3)

## 7°) Variance ou moment d'ordre 2, écart-type

### b) Définitions

Formule générale : On appelle variance de la vard X ou moment centré d'ordre 2 le nombre suivant :

$$\text{var}(X) = E\left( ( X - E(X))^2 \right) = \text{l'espérance du carré des écarts à la moyenne}$$

$$= \sum_{i \in I} ( x_i - \overline{X} )^2 \ P( [ X = x_i ] )$$

Avec 2 déclinaisons :

- Dans le cas fini où $I$ est **fini** et Card( I ) = n,

  on notera $X\langle \Omega \rangle = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_n$

  $$\textbf{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} ( x_i - \overline{X} )^2 \ P( [ X = x_i ] )$$

- Dans le cas où $I$ est **infini dénombrable**,

  on notera $X\langle \Omega \rangle = \{x_i \ / \ i \in I\}$

  **var (X) = la somme de la série** $\sum_{i \in I} ( x_i - \overline{X} )^2 \ P( [ X = x_i ] )$ **à condition que cette série soit absolument convergente**

Lorsque var(X) = 0 on dit alors que la variable aléatoire X est constante

Lorsque var(X) = 1 on dit alors que la variable aléatoire X est réduite

### b) Propriétés

**P1 - var (X) $\geq$ 0**

**Définition de l'écart-type :**

**on appelle écart-type $\sigma$ (X) la racine carrée de la variance**

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$$

**P2 - Formule de Koenig-Huyghens**

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ce qui explique la disposition suivante lorsque l'univers-image est fini :

| Valeurs de X $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ..... | | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ ou $P([X = x_i])$ | | | | | 1 |
| $p_i \ x_i$ | | | | | |
| $x_i^2$ | | | | | |
| $p_i \ x_i^2$ | | | | | |

**P3 - Pour tout réel $\lambda$, pour toute variable aléatoire réelle X ,**

$$\text{var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{var}(X)$$

$$\text{var}(X + \lambda) = \text{var}(X)$$

**P4 - si l'on note $m = E(X)$ et $\sigma = Var(X)$**

**alors $E(\frac{X - m}{\sigma}) = 0$ donc $\frac{X - m}{\sigma}$ est centrée**

**$Var(\frac{X - m}{\sigma}) = 1$ donc $\frac{X - m}{\sigma}$ est réduite**

**En conclusion $\frac{X - m}{\sigma}$ est centrée réduite**

**Définition de variables aléatoires indépendantes**

Des variables aléatoires réelles X et Y sont dites indépendantes lorsque leurs lois de probabilités $P_X$ et $P_Y$ sont indépendantes c'est-à-dire que $\forall x_i \in X\langle\Omega\rangle \; \forall y_j \in Y\langle\Omega\rangle$

$$P( [X = x_i] \cap ( Y = y_j] ) = P( [X = x_i]) \, P( [Y = y_j] )$$

**Définition du produit de deux variables aléatoires :**

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles alors

$$XY : \Omega \dashrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \dashrightarrow XY(\omega) = X(\omega)\, Y(\omega)$$

**P5 - si X et Y sont indépendantes alors**

$$E(X\,Y) = E(X) + E(Y)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

**P6 - 4 formes de l'inégalité de BienAimé-Tchebicheff**

**Soit X une variable aléatoire réelle discrète de moyenne m et d'écart-type $\sigma$**

**IBT Forme 1 : $\forall$ réel $k > 0$ $P( | X - m | \geq k ) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$**

**IBT Forme 1 : $\forall$ réel $k > 0$ $P( | X - m | < k ) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$**

**IBT Forme 3 : $\forall$ réel $k > 0$ $P( | X - m | < k\sigma ) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$**

**IBT Forme 4 : $\forall$ réel $k > 0$ $P( | X - m | \geq k\sigma ) \leq \frac{1}{k^2}$**

**Cas particulier k = 2**

**$P( | X - m | \geq 2\sigma ) \leq \frac{1}{4} = 0{,}25$**

**Cas particulier k = 3**

**$P( | X - m | \geq k\sigma ) \leq \frac{1}{9} = 0{,}11$**